ΗΥ-217 Δεύτερη σειρά ασκήσεων

21 Οκτωβρίου 2002

Ημερομηνία παράδοσης 25-10-02

1 Άσκηση

Μια παρτίδα από 100 λάμπες εργοστασίου ελέγχεται διαλέγοντας τυχαία 4 λάμπες από την παρτίδα αυτή. Εάν μια από τις τέσσερις βγει ελαττωματική απορρίπτεται ολόκληρη η παρτίδα. Βρείτε την πιθανότητα η παρτίδα να είναι αποδεκτή, όταν περιέχει συνολικά πέντε ελαττωματικές λάμπες.

2 Άσκηση

Έχουμε k δοχεία που το καθένα περιέχει m λευκές και n μαύρες μπάλες. Διαλέγουμε από το δοχείο 1 μια μπάλα και την τοποθετούμε στο δοχείο 2. Έπειτα διαλέγουμε τυχαία μια μπάλα από το δοχείο 2 και την τοποθετούμε στο δοχείο 3 κ.ο.κ. Τέλος διαλέγουμε τυχαία μια μπάλα από το δοχείο k. Δείξτε ότι η πιθανότητα η τελευταία μπάλα να είναι λευκή είναι ίση με την πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι λευκή.

3 Άσκηση

Έχουμε 2 δοχεία που το καθένα περιέχει αρχικά n μπάλες. Ανταλλάσουμε διαδοχικά τις μπάλες ως εξής. Παίρνουμε ταυτόχρονα μια μπάλα από κάθε δοχείο και τοποθετούμε κάθε μπάλα στο άλλο δοχείο. Βρείτε την πιθανότητα μετά από 4 τέτοιες εναλλαγές οι μπάλες να βρίσκονται στο ίδιο δοχείο που βρίσκονταν στην αρχική τους κατάσταση.

4 Άσκηση

Έστω A και B δύο ενδεχνόμενα με P(A) > 0 και P(B) > 0. Λέμε ότι το ενδεχνόμενο B *υποδεικνύει* το A όταν P(A|B) > P(A) και *δεν υποδεικνύει* το A όταν P(A|B) < P(A).
(α) Δείξτε ότι το B *υποδεικνύει* το A αν και μόνο αν το A *υποδεικνύει* το B.
(β) Έστω ότι $\mathrm{P}(B^c) > 0$. Δείξτε ότι το B *υποδεικνύει* το A αν και μόνο αν το B^c *δεν υποδεικνύει* το A.
(γ) Γνωρίζουμε ότι ένας θησαυρός βρίσκεται σε ένα από δύο μέρη με πιθανότητα β και 1-β αντίστοιχα και 0<β<1. Ψάχνουμε το ένα μέρος και αν ο θησαυρός βρίσκεται εκεί τον βρίσκουμε με πιθανότητα p>0. Δείξτε ότι το ενδεχνόμενο να μην βρούμε τον θησαυρό στο πρώτο μέρος *υποδεικνύει* ότι ο θησαυρός είναι στο δεύτερο μέρος.

5 Άσκηση

Δείξτε ότι
$P(A \mid B) = P(C \mid B)P(A \mid B \cap C) + P(C^c \mid B)\ P(A \mid B \cap C^c)$
εάν υποθέσουμε ότι όλα τα ενδεχνόμενα έχουν θετική πιθανότητα.

6 Άσκηση

Έστω ότι ένας κυνηγός έχει 2 κυνηγετικά σκυλιά. Μια μέρα που πήγαν για κυνήγι, στην προσπάθειά τους να πιάσουν ένα ζώο, έφτασαν σε ένα δρόμο που χωρίζεται σε δύο μονοπάτια. Ο κυνηγός γνωρίζει ότι κάθε σκυλί ανεξάρτητα από το άλλο θα διαλέξει το σωστό μονοπάτι με πιθανότητα p. Αποφασίζει να αφήσει τα σκυλιά να αποφασίσουν μόνα τους ποιό μονοπάτι θα διαλέξουν και αν συμφωνήσουν θα ακολουθήσει και ο ίδιος το μονοπάτι αυτό, αλλιώς θα διαλέξει ένα στην τύχη. Εξετάστε αν η στρατηγική αυτή είναι καλύτερη από το να αφήσει ένα από τα σκυλιά να επιλέξει ένα μονοπάτι.

7 Άσκηση

Ένας βασιλιάς έχει ένα αδέρφι (αρσενικού ή θηλυκού γένους, δεν το γνωρίζουμε). Ποιά είναι η πιθανότητα το αδέρφι να είναι αρσενικό; Υποθέστε ότι ένα αγόρι γεννιέται με πιθανότητα 1/2 ανεξάρτητα από γέννηση σε γέννηση. Σχετικά με την στρατηγική των γονιών του βασιλιά, κάντε δύο υποθέσεις και λύστε το πρόβλημα για κάθε μια από αυτές. Πρώτα υποθέστε ότι οι γονείς είχαν αποφασίσει να κάνουν ακριβώς δύο παιδιά και μετά σταμάτησαν. Μετά υποθέστε ότι οι γονείς του βασιλιά έκαναν παιδιά μέχρι να γεννηθεί αγόρι.

8 Άσκηση

Μια εταιρία παροχής ηλεκτρισμού μπορεί να παρέχει σε μια ολόκληρη πόλη ηλεκτρισμό από n διαφορετικές μονάδες. Η μονάδα i αποτυγχάνει στον σκοπό της με πιθανότητα p,ανεξάρτητα από την λειτουργία των άλλων.
(α) Ας υποθέσουμε ότι κάθε μια από την μονάδα μπορεί να παράξει αρκετό ηλεκτρισμό για ολόκληρη την πόλη. Βρείτε την πιθανότητα η πόλη να έχει black out.
(β) Ας υποθέσουμε ότι δύο μονάδες είναι απαραίτητες για να μην έχει η πόλη blackout. Βρείτε την πιθανότητα η πόλη να έχει blackout.

9 Άσκηση

Έστω A, B και C ανεξάρτητα ενδεχόμενα με P(C) > 0. Αποδείξτε ότι τα A και B είναι ανεξάρτητα δεδομένου του C.

10 Άσκηση

Υποθέστε ότι τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3, A_4 είναι ανεξάρτητα και ότι $P(A_3 \cap A_4) > 0$. Δείξτε ότι
$P(A_1 \cup A_2 \mid A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cup A_2)$.