ΗΥ-217 Λύσεις πρώτης σειράς ασκήσεων

8 Οκτωβρίου 2002

Ημερομηνία παράδοσης 7-10-02

1 Άσκηση

1.Από τα διαγράμματα Venn μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι για δύο σύνολα S,T ισχύει η ισότητα
S = (S ∩ T) ∪ (S ∩ T^c)
Για S = A^c και T = B εξάγεται η ισότητα
A^c = (A^c ∩ B) ∪ (A^c ∩ B^c)
2.Για A = B εξάγεται η ισότητα
B^c = (A ∩ B^c) ∪ (A^c ∩ B^c)
3.Από τους νόμους του De Morgan ισχύει
(A ∩ B)^c = A^c ∪ B^c
Επομένως, από τις ισότητες 1. και 2. ισχύει
(A∩B)^c = ((A^c ∩ B) ∪ (A^c ∩ B^c)) ∪ ((A∩B^c) ∪ (A^c ∩ B^c)) =
(A^c ∩ B) ∪ (A^c ∩ B^c) ∪ (A ∩ B^c)
4.Έχουμε A = { 1,3,5 } και B = { 1,2,3 }, άρα A ∩ B = { 1,3 }.
Επομένως,
(A ∩ B)^c = { 2,4,5,6 }
A^c ∩ B = {2}
A^c ∩ B^c = { 4,6 }
A ∩ B^c = {5}

2 Άσκηση

Έστω G η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε να είναι πολύ καλός μαθητής και C η πιθανότητα να του αρέσει η σοκολάτα. Τότε P(G) = 0.6, P(C) = 0.7 και P(G ∩ C) = 0.4. Ζητείται η πιθανότητα P(G^c ∩ C^c).
P(G^c ∩ C^c) = 1 - P(G ∪ C) = 1 - ((P(G)+P(C)-P(G ∩ C)) = 1 - (0.6+0.7-0.4) = 0.1

3 Άσκηση

1.Έχουμε P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B) και P(A ∪ B) $\leq$ 1, όπου συνεπάγεται η ζητούμενη ανισότητα P(A∩B) $\geq$ P(A)+P(B)-1.
2.Από το νόμο του De Morgan έχουμε ότι
$1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$
$=P((A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c)$
$=P(A_1^c \cup \ldots \cup A_n^c)$
$\leq P(A_1^c)+ \ldots + P(A_n^c)$
$=(1 - P(A_1)) + \ldots + (1 - P(A_n))$
$=n - P(A_1) - \ldots - P(A_n)$.

4 Άσκηση

1.Κάθε δυνατό ενδεχόμενο έχει πιθανότητα να συμβεί 1/36.Με 6 τρόπους μπορούμε να φέρουμε διπλές, άρα η πιθανότητα να φέρουμε διπλές είναι 6/36 = 1/6.
2.Το ενδεχόμενο να φέρουμε άθροισμα μικρότερο ή ίσο του 4 περιγράφεται από το σύνολο (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1).
Παρατηρούμε ότι με δύο τρόπους μπορούμε να φέρουμε διπλές (1,1) ή (2,2).Επομένως η πιθανότητα που ζητάμε είναι 2/6 = 1/3.
3.Το ενδεχόμενο τουλάχιστον το ένα ζάρι να φέρει 6, μπορεί να πραγματοποιηθεί με 11 τρόπους ως εξής (6,6), (6,t), (t,6) όπου t = 1,2,...,5. Άρα, η πιθανότητα τουλάχιστον το ένα ζάρι να φέρει 6 είναι 11/36.
4.Οι τρόποι με τους οποίους μπορούν τα ζάρια να φέρουν διαφορετικούς αριθμούς είναι 6*5=30.Από αυτούς, τουλάχιστον ένα 6 μπορώ να φέρω με 10 τρόπους.Άρα η πιθανότητα που ζητάμε είναι 10/30=1/3.

5 Άσκηση

Έστω A το ενδεχόμενο να ήρθε κορώνα, και B το ενδεχόμενο να επιλέχθηκε κέρμα με δύο κορώνες.Έστω p η πιθανότητα δεδομένου ότι ήρθαν κεφαλές το κέρμα που επιλέχθηκε έχει και από τις δύο πλευρές κεφαλές. Τότε έχουμε
p = P(A|B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Όμως P(A ∩ B) = 1/3 και P(B) = 1/2, άρα p = 2/3.
Η πιθανότητα να είναι η άλλη πλευρά γράμματα είναι 1 - p = 1/3.

6 Άσκηση

P(A $\cap B \mid B$) = $\frac{P(A \cap B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ = P(A|B).