Τυπολόγιο για ΗΥ217 - Θεωρια Πιθανοτήτων

13 Φεβρουαρίου 2014

1 Δομες Πιθανοτικών Μοντέλων

1.1 Ένωση - Τομή

$$S \cup T = \{x | x \in S \text{ ή } x \in T\}$$

$$S \cap T = \{x | x \in S \text{ και } x \in T\}$$

1.2 Ξένα σύνολα

$$S \cap T = \emptyset$$

1.3 Άλγεβρα Συνόλων

Αν Ω ο δειγματοχώρος, και S, T, X υποσύνολα αυτού, τοτε

- $S \cap (T \cup X) = (S \cap T) \cup (S \cap X)$
- $S \cup (T \cup X) = (S \cup T) \cup X$
- $S \cup (T \cap X) = (S \cup T) \cap (S \cup X)$
- $S \cup \Omega = \Omega$, $S \cap S^c = \emptyset$, $(S^c)^c = S$
- $S \cap \Omega = S$, $S - T = S \cap T^c$

1.4 Νόμοι De Morgan

$$\Big(\cup_n S_n\Big)^c = \cap_n S_n^c,\ \Big(\cap_n S_n\Big)^c = \cup_n S_n^c$$

2 Βασικές Πιθανότητες

- $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \Omega,\ P(\Omega) = 1$
- $P\Big(\cup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} P(A_i)$, για οποιαδήποτε $\{A_i, i \in I\}$ με $A_i \in \Omega$ και $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$, $P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Αν $B \subset A$, τότε $P(B) \leq P(A)$

2.1 Δεσμευμένη Πιθανότητα

- $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$
- $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$
- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

2.2 Πολλαπλασιαστικός Νόμος

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^n A_i) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots \\ &\quad \cdots P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \end{aligned}$$

2.3 Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Αν $A_1, \cdots, A_n$ ξένα γεγονότα που αποτελούν διαμέριση του Ω, τότε για κάθε γεγονός B ισχύει

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

2.4 Κανόνας του Bayes

Αν $A_1, \cdots, A_n$ μια διαμέριση του Ω, τότε για κάθε γεγονός B με $P(B) > 0$, ισχύει

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}$$

2.5 Ανεξαρτησία

Δυο γεγονότα λέγονται ανεξάρτητα αν ισχύει ότι

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

2.5.1 Υπό συνθήκη ανεξαρτησία

Δεδομένου γεγονότος C, τα A, B είναι ανεξάρτητα όταν

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

2.5.2 Ανεξαρτησία Συλλογής Γεγονότων

Τα $A_1, A_2, \cdots, A_n$ είναι ανεξάρτητα αν

$$P(\cap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

για κάθε υποσύνολο $I \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

3 Συνδυαστική

3.1 Καρτεσιανό Γινόμενο

Αν έχουμε σύνολα $S_1, S_2, \cdots, S_r$, με $n_1, n_2, \cdots, n_r$ το πλήθος στοιχεία αντίστοιχα, τότε υπάρχουν $n_1, n_2, \cdots, n_r$ το πλήθος διατεταγμένες $r-$αδες $(a_1, \cdots, a_r)$ με $a_i \in S_i$. Το σύνολο S των $n_1, \cdots, n_r$ $r-$άδων καλείται *καρτεσιανό γινόμενο*:

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r = \{(a_1, \cdots, a_r) | a_i \in S_i, i = 1, \cdots, r\}$$

3.2 Διατάξεις (Μεταθέσεις)

Από ένα πλήθος n διαφορετικών αντικειμένων παίρνουμε k από αυτά και τα βάζουμε σε μια σειρά. Οι ακολουθίες k στοιχειων που προκύπτουν καλούνται *διαταξεις των στοιχείων n ανά k* και είναι το πλήθος

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3.3 Συνδυασμοί

Σε μια Διάταξη λαμβανουμε υπόψη τη σειρά των στοιχειων. Αν δε μας ενδιαφέρει η σειρά αλλά μόνο τα διαφορετικά σύνολα που προκύπτουν, λέμε ότι παίρνουμε τους *συνδυασμούς n στοιχειων ανά k*, που είναι το πλήθος

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

3.4 Διαμερισμοί

Ο διαμερισμός ενός αρχικού συνόλου σε r υποσύνολα, ξένα μεταξύ τους, που περιέχουν $n_1, n_2, \cdots, n_r$ στοιχεία, ώστε $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ γίνεται με

$$P(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

3.5 Δειγματοληψία

- Με επανάθεση: n στοιχεία με Δ δείγματα μεγεθους k: n^k το πλήθος δυνατών δειγμάτων

- Χωρίς επανάθεση: n στοιχεία με κάθε δειγμα που αντιστοιχεί σε μια διάταξη n στοιχειων ανά k: $P(n,k)$ το πλήθος δείγματα μεγέθους k

- Χωρίς επανάθεση χωρίς διάταξη: εξετάζονται μαζι k στοιχεία: $C(n,k)$ το πλήθος των δειγμάτων

- Διαδοχική δειγματοληψία: αν το δειγμα παρθεί σε r στάδια, με διαδοχικά μεγεθη $n_1, n_2, \cdots, n_r$, τότε το πλήθος των δυνατων δειγμάτων είναι $P(n_1, n_2, \cdots, n_r)$

4 Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

4.1 Συνάρτηση Πιθανότητας

Αν x μια τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, η *πιθανότητα μάζας* του x ορίζεται ως $p_X(x) = P(X = x)$ όπου το γεγονός $\{X = x\}$ αποτελειται από όλα τα απλά ενδεχόμενα που συντελούν στο να πάρει η τ.μ. X την τιμή x.

4.2 Ιδιότητες:

- $\sum_x p_X(x) = 1$
- $P(X \in S) = \sum_{x \in S} p_X(x)$

4.3 Bernoulli τ.μ.

$$p_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ 1-p, & k = 0 \end{cases}$$

$$E[X] = p,\ var(X) = p(1-p)$$

4.4 Δυωνυμική τ.μ.

Έστω X το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων (με πιθανότητα p το καθένα) σε μια ακολουθία n προσπαθειών, τότε η X ειναι διωνυμική με παραμέτρους n, p και

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \cdots, n$$

$$E[X] = np,\ var(X) = np(1-p)$$

4.5 Γεωμετρική τ.μ.

Σε ένα πειραμα Bernoulli, μας ενδιαφερει το πλήθος των προσπαθειών μέχρι την πρωτη επιτυχία, τότε αν X η τ.μ. που περιγράφει το πλήθος των διαδοχικών δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία, τοτε

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1}p,\ k = 1, 2, \cdots$$

$$E[X] = \frac{1}{p},\ var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

4.6 Αρνητική Διωνυμική (Pascal) τ.μ.

Σε ενα πείραμα Bernoulli, μας ενδιαφερει το πλήθος των δοκιμών μέχρι την εμφανιση r ευνοϊκών αποτελεσμάτων. Αν η τ.μ X περιγράφει το πλήθος αυτό, τοτε

$$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r},\ k = r, r+1, \cdots$$

όπου k η δοκιμή οπου εμφανίστηκε το ευνοϊκό γεγονός για τελευταια φορά. Επίσης,

$$E[X] = \frac{r(1-p)}{p},\ var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

4.7 Poisson τ.μ.

Όταν μας ενδιαφέρει η πιθανότητα εμφάνισης ενός γεγονότος κατα τη διάρκεια ενός χρονικού διαστηματος, τότε η πιθανότητα αυτη μοντελοποιείται ως

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

όπου $\lambda > 0$ η παράμετρος της κατανομής. Η κατανομή Poisson χρησιμοποιειται και ως προσέγγιση της Διωνυμικής οταν $n \to \infty$, $p \to 0$.

$$E[X] = \lambda,\ var(X) = \lambda$$

4.8 Διακριτή Ομοιόμορφη τ.μ.

Η τυχαια μεταβλητή της οποίας οι τιμές είναι ίδιες και η οποία ορίζεται σε ενα διάστημα $[a, b]$, λέγεται ομοιόμορφη, και η κατανομή της είναι

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, & k = a, a+1, \cdots, b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2},\ var(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$$

4.9 Συναρτησεις Τ.Μ.

$$p_Y(y) = \sum_{x | g(x) = y} p_X(x)$$

5 Μέση Τιμή - Διασπορά

- $E[X] = \sum_x x p_X(x)$
- Αν $Y = g(X)$, τότε
  $$E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[ag(X) + b] = aE[g(X)] + b$
- $var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$
- Τυπική Απόκλιση: $\sigma_x = \sqrt{var(X)}$
- Αν $Y = aX + b$, τότε
  $$E[Y] = aE[X] + b,\ var(Y) = a^2 var(X)$$