Τυπολόγιο για ΗΥ217 - Θεωρια Πιθανοτήτων

13 Φεβρουαρίου 2014

1 Δομες Πιθανοτικών Μοντέλων

1.1 Ένωση - Τομή

$$S \cup T = \{x | x \in S \text{ ή } x \in T\}$$

$$S \cap T = \{x | x \in S \text{ και } x \in T\}$$

1.2 Ξένα σύνολα

$$S \cap T = \emptyset$$

1.3 Άλγεβρα Συνόλων

Αν Ω ο δειγματοχώρος, και S, T, X υποσύνολα αυτού, τοτε

- $S \cap (T \cup X) = (S \cap T) \cup (S \cap X)$
- $S \cup (T \cup X) = (S \cup T) \cup X$
- $S \cup (T \cap X) = (S \cup T) \cap (S \cup X)$
- $S \cup \Omega = \Omega$, $S \cap S^c = \emptyset$, $(S^c)^c = S$
- $S \cap \Omega = S$, $S - T = S \cap T^c$

1.4 Νόμοι De Morgan

$$\Big(\cup_n S_n\Big)^c = \cap_n S_n^c, \ \Big(\cap_n S_n\Big)^c = \cup_n S_n^c$$

2 Βασικές Πιθανότητες

- $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \Omega$, $P(\Omega) = 1$
- $P\Big(\cup_{i \in I} A_i\Big) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, για οποιαδήποτε $\{A_i, i \in I\}$ με $A_i \in \Omega$ και $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$, $P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Αν $B \subset A$, τότε $P(B) \leq P(A)$

2.1 Δεσμευμένη Πιθανότητα

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$
- $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2 | B)$
- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

2.2 Πολλαπλασιαστικός Νόμος

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^n A_i) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \\ & \quad \cdots P(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \end{aligned}$$

2.3 Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Αν $A_1, \cdots, A_n$ ξένα γεγονότα που αποτελούν διαμέριση του Ω, τότε για κάθε γεγονός B ισχύει

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

2.4 Κανόνας του Bayes

Αν $A_1, \cdots, A_n$ μια διαμέριση του Ω, τότε για κάθε γεγονός B με $P(B) > 0$, ισχύει

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}$$

2.5 Ανεξαρτησία

Δυο γεγονότα λέγονται ανεξάρτητα αν ισχύει ότι

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

2.5.1 Υπό συνθήκη ανεξαρτησία

Δεδομένου γεγονότος C, τα A, B είναι ανεξάρτητα όταν

$$P(A \cap B | C) = P(A|C)P(B|C)$$

2.5.2 Ανεξαρτησία Συλλογής Γεγονότων

Τα $A_1, A_2, \cdots, A_n$ είναι ανεξάρτητα αν

$$P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

για κάθε υποσύνολο $I \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

3 Συνδυαστική

3.1 Καρτεσιανό Γινόμενο

Αν έχουμε σύνολα $S_1, S_2, \cdots, S_r$, με $n_1, n_2, \cdots, n_r$ το πλήθος στοιχεία αντίστοιχα, τότε υπάρχουν $n_1, n_2, \cdots, n_r$ το πλήθος διατεταγμένες $r-$αδες $(a_1, \cdots, a_r)$ με $a_i \in S_i$. Το σύνολο S των $n_1, \cdots, n_r$ $r-$άδων καλείται *καρτεσιανό γινόμενο*:

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r = \{(a_1, \cdots, a_r) | a_i \in S_i, i = 1, \cdots, r\}$$

3.2 Διατάξεις (Μεταθέσεις)

Από ένα πλήθος n διαφορετικών αντικειμένων παίρνουμε k από αυτά και τα βάζουμε σε μια σειρά. Οι ακολουθίες k στοιχειων που προκύπτουν καλούνται *διαταξεις των στοιχείων n ανά k* και είναι το πλήθος

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3.3 Συνδυασμοί

Σε μια Διάταξη λαμβανουμε υπόψη τη σειρά των στοιχειων. Αν δε μας ενδιαφέρει η σειρά αλλά μόνο τα διαφορετικά σύνολα που προκύπτουν, λέμε ότι παίρνουμε τους *συνδυασμούς n στοιχειων ανά k*, που είναι το πλήθος

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

3.4 Διαμερισμοί

Ο διαμερισμός ενός αρχικού συνόλου σε r υποσύνολα, ξένα μεταξύ τους, που περιέχουν $n_1, n_2, \cdots, n_r$ στοιχεία, ώστε $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ γίνεται με

$$P(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

3.5 Δειγματοληψία

- Με επανάθεση: n στοιχεία με Δ δείγματα μεγεθους k: n^k το πλήθος δυνατών δειγμάτων

- Χωρίς επανάθεση: n στοιχεία με κάθε δειγμα που αντιστοιχεί σε μια διάταξη n στοιχειων ανά k: $P(n,k)$ το πλήθος δείγματα μεγέθους k

- Χωρίς επανάθεση χωρίς διάταξη: εξετάζονται μαζι k στοιχεία: $C(n,k)$ το πλήθος των δειγμάτων

- Διαδοχική δειγματοληψία: αν το δειγμα παρθεί σε r στάδια, με διαδοχικά μεγεθη $n_1, n_2, \cdots, n_r$, τότε το πλήθος των δυνατων δειγμάτων είναι $P(n_1, n_2, \cdots, n_r)$

4 Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

4.1 Συνάρτηση Πιθανότητας

Αν x μια τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, η *πιθανότητα μάζας* του x ορίζεται ως $p_X(x) = P(X = x)$ όπου το γεγονός $\{X = x\}$ αποτελειται από όλα τα απλά ενδεχόμενα που συντελούν στο να πάρει η τ.μ. X την τιμή x.

4.2 Ιδιότητες:

- $\sum_x p_X(x) = 1$
- $P(X \in S) = \sum_{x \in S} p_X(x)$

4.3 Bernoulli τ.μ.

$$p_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ 1-p, & k = 0 \end{cases}$$

$$E[X] = p,\ var(X) = p(1-p)$$

4.4 Δυωνυμική τ.μ.

Έστω X το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων (με πιθανότητα p το καθένα) σε μια ακολουθία n προσπαθειών, τότε η X ειναι διωνυμική με παραμέτρους n, p και

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \cdots, n$$

$$E[X] = np,\ var(X) = np(1-p)$$

4.5 Γεωμετρική τ.μ.

Σε ένα πειραμα Bernoulli, μας ενδιαφερει το πλήθος των προσπαθειών μέχρι την πρωτη επιτυχία, τότε αν X η τ.μ. που περιγράφει το πλήθος των διαδοχικών δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία, τοτε

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p,\ k = 1, 2, \cdots$$

$$E[X] = \frac{1}{p},\ var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

4.6 Αρνητική Διωνυμική (Pascal) τ.μ.

Σε ενα πείραμα Bernoulli, μας ενδιαφερει το πλήθος των δοκιμών μέχρι την εμφανιση r ευνοϊκών αποτελεσμάτων. Αν η τ.μ X περιγράφει το πλήθος αυτό, τοτε

$$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r},\ k = r, r+1, \cdots$$

όπου k η δοκιμή οπου εμφανίστηκε το ευνοϊκό γεγονός για τελευταια φορά. Επίσης,

$$E[X] = \frac{r(1-p)}{p},\ var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

4.7 Poisson τ.μ.

Όταν μας ενδιαφέρει η πιθανότητα εμφάνισης ενός γεγονότος κατα τη διάρκεια ενός χρονικού διαστηματος, τότε η πιθανότητα αυτη μοντελοποιείται ως

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

όπου $\lambda > 0$ η παράμετρος της κατανομής. Η κατανομή Poisson χρησιμοποιειται και ως προσέγγιση της Διωνυμικής οταν $n \to \infty$, $p \to 0$.

$$E[X] = \lambda,\ var(X) = \lambda$$

4.8 Διακριτή Ομοιόμορφη τ.μ.

Η τυχαια μεταβλητή της οποίας οι τιμές είναι ίδιες και η οποία ορίζεται σε ενα διάστημα $[a,b]$, λέγεται ομοιόμορφη, και η κατανομή της είναι

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, & k = a, a+1, \cdots, b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2},\ var(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$$

4.9 Συναρτησεις Τ.Μ.

$$p_Y(y) = \sum_{x | g(x) = y} p_X(x)$$

5 Μέση Τιμή - Διασπορά

- $E[X] = \sum_x x p_X(x)$
- Αν $Y = g(X)$, τότε
$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[ag(X) + b] = aE[g(X)] + b$
- $var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$
- Τυπική Απόκλιση: $\sigma_x = \sqrt{var(X)}$
- Αν $Y = aX + b$, τότε
$$E[Y] = aE[X] + b,\ var(Y) = a^2 var(X)$$

6 Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

6.1 Συνάρτηση Πιθανότητας

Η τ.μ. X ονομάζεται *συνεχής* όταν ο πιθανοτικός νόμος που την περιγράφει ορίζεται μέσω μιας μη αρνητικής συνάρτησης f_x, η οποία ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* που ικανοποιεί τη σχέση

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx$$

για κάθε υποσύνολο B του πραγματικού άξονα $\Re$.

6.2 Ιδιότητες:

- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$
- $P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$
- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
- Οι τιμές της $f_X(x)$ ΔΕΝ παριστάνουν πιθανότητα (μπορούν να είναι > 1).
- Η $f_X(x)$ χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό πιθανοτήτων γεγονότων αλλά δεν είναι η πιθανότητα κάποιου συγκεκριμένων γεγονότων.

6.3 Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum\limits_{k \leq x} p_X(x), & X \text{ διακριτή τ.μ.} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & X \text{ συνεχης τ.μ.} \end{cases}$$

6.4 Ιδιότητες:

- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
- $x_1 \leq x_2 \to F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $P(x_1 < X < x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1)$
- Αν η X είναι διακριτή, τότε $p_X(x) =$

  $= P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = F_X(k) - F_X(k-1), \forall k$
- Αν η X είναι συνεχής, τότε

  $$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$
- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$

6.5 Μέση Τιμή - Διασπορά

- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$
- Αν $Y = g(X)$, τότε

  $$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)$$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[ag(X) + b] = aE[g(X)] + b$
- $var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$
- Τυπική Απόκλιση: $\sigma_x = \sqrt{var(X)}$
- Αν $Y = aX + b$, τότε

  $$E[Y] = aE[X] + b,\ var(Y) = a^2 var(X)$$

6.6 Συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2},\ var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

6.7 Συνεχής Εκθετική τ.μ.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda},\ var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

6.8 Συνεχής Κανονική (Gaussian) τ.μ.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E[X] = \mu,\ var(X) = \sigma^2$$

6.9 Συνεχής Τυπική Κανονική τ.μ.

- Η συνάρτηση κατανομής ορίζεται ως

  $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

  - $E[X] = 0,\ var(X) = 1$
- Η ΑΣΚ προκύπτει ως

  $$\Phi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

  με

  $$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$
- Η τυπική κανονική τ.μ. X προκύπτει από την κανονική τ.μ. Y ως

  $$X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

6.10 Δεσμευμ. Συν. Πυκν. Πιθανότητας

- $P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$
- $P(X \in B|X \in A) = \frac{\int_{A\cap B} f_X(x)dx}{P(X \in A)}$
- $f_{X|A}(x|A) = \frac{f_X(x)}{P(X \in A)}$, αν $x \in A$

6.11 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

$$\begin{aligned} E[X|A] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|A}(x)dx \\ E[g(X)|A] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|A}(x)dx \\ f_X(x) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) f_{X|A_i}(x) \\ E[X] &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) E[X|A_i] \\ E[g(X)] &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) E[g(X)|A_i] \end{aligned}$$

6.12 Πολυδιάστατες τ.μ.

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δυο συνεχών τ.μ. ικανοποιεί την

$$P((X,Y) \in B) = \int\int_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

Αν $B = [a,b] \times [c,d]$ τότε

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

Προφανώς πρεπει

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

Επίσης

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= P(X \in A \cap Y \in (-\infty,\infty)) \\ &= \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx \end{aligned}$$

6.12.1 Περιθωριακές συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \end{aligned}$$

6.12.2 Μέση Τιμή

$$\begin{aligned} E[g(X,Y)] &= \int\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ E[aX+bY] &= aE[X] + bE[Y] \end{aligned}$$

6.12.3 Εξάρτηση της X ως προς την Y

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\ P(X \in A|Y=y) &= \int_A f_{X|Y}(x|y)dx \end{aligned}$$

6.12.4 Δεσμευμένες Μέσες Τιμές

$$\begin{aligned} E[X|Y=y] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx \\ E[g(X)|Y=y] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y)dx \\ E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y] f_Y(y)dy \\ E[g(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[g(X)|Y=y] f_Y(y)dy \\ E[g(X,Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[g(X,Y)|Y=y] f_Y(y)dy \end{aligned}$$

6.12.5 Νόμος του Bayes

Αν X συνεχής, τότε

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) f_{Y|X}(y|x)}{\int f_X(t) f_{Y|X}(y|t)dt}$$

Αν X διακριτή, τοτε

$$P(X=x|Y=y) = \frac{p_X(x) f_{Y|X}(y|x)}{\sum_{k=1}^{n} p_X(k) f_{Y|X}(y|k)}$$

6.12.6 Ανεξαρτησία

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_X(x) f_Y(y) \\ E[g(X)h(Y)] &= E[g(X)]E[h(Y)] \\ var(X+Y) &= var(X) + var(Y) \end{aligned}$$

6.12.7 Από κοινού ΑΣΚ

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dtds \\ f_{X,Y}(x,y) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x,y) \end{aligned}$$

6.13 Υπολογισμός της $Y = g(X)$

1. Υπολογίζουμε την ΑΣΚ της Y:

$$F_Y(y) = P(g(X) \le y) = \int_{x|g(x)\le y} f_X(x)dx$$

2. Παραγωγίζουμε ως προς y για να πάρουμε την $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y)$$

6.13.1 Γραμμικές Συναρτήσεις

Έστω X συνεχης τ.μ. με $f_X(x)$ και $Y = aX+b$, με $a \ne 0$, τότε

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big)$$

6.13.2 Μονότονες Συναρτήσεις

Έστω g μονότονη συνάρτηση, και κάποια συνάρτηση h και για κάθε x στο πεδίο ορισμού I της X ισχύει οτι $y = g(x)$ αν και μόνο αν $x = h(y)$. Η h έχει πρώτη παραγωγο την $\frac{dh}{dy}(y)$. Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \Big|\frac{dh}{dy}(y)\Big| f_X(h(y)) \\ &= \frac{1}{\Big|\frac{dg}{dx}(x)\Big|} f_X(x) \end{aligned}$$