ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026**
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**
**Φροντιστήριο 6**

## Άσκηση 1

Οι συνεχείς τ.μ. $X$ και $Y$ έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, y \leq x \\ c, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, y > x \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

**(α΄)** Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε τη σταθερά $c$.

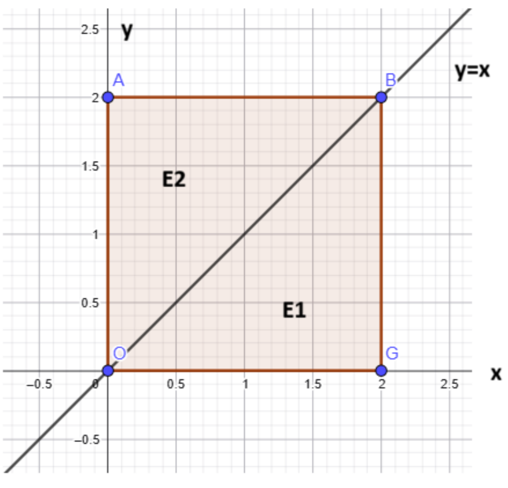
**(β΄)** Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. $X$.

**(γ΄)** Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X < 1, Y < 1)$.

**(δ΄)** Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X + Y \geq 3)$.

**Λύση:**
**(α)** Η περιοχή ορισμού είναι το τετράγωνο με κορυφές $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$, συνολικού εμβαδού $2 \times 2 = 4$. Η ευθεία $y = x$ χωρίζει το τετράγωνο σε δύο ίσα τρίγωνα, το $E_1$ (κάτω από την $y = x$) και το $E_2$ (πάνω από την $y = x$).

$$\text{Εμβαδόν } E_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$
$$\text{Εμβαδόν } E_2 = 4 - 2 = 2$$




Σχήμα 1: Γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π.

Από τη σχέση κανονικοποίησης, το ολοκλήρωμα της σ.π.π. πρέπει να ισούται με 1:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\implies \frac{1}{3} \cdot \text{Εμβαδόν}(E_1) + c \cdot \text{Εμβαδόν}(E_2) = 1$$

$$\implies \frac{1}{3} \cdot 2 + c \cdot 2 = 1$$

$$\implies \frac{2}{3} + 2c = 1 \implies 2c = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\implies c = \frac{1}{6}$$

Άρα $c = 1/6$.

**(β)** Για $x \in [0, 2]$, η περιθωριακή σ.π.π. $f_X(x)$ υπολογίζεται ολοκληρώνοντας ως προς $y$ από $0$ έως $2$. Το ολοκλήρωμα χωρίζεται στο τμήμα $y \in [0, x]$ όπου $f = 1/3$ και στο τμήμα $y \in (x, 2]$ όπου $f = c = 1/6$.

$$f_X(x) = \int_0^2 f_{X,Y}(x, y)\, dy = \int_0^x \frac{1}{3}\, dy + \int_x^2 \frac{1}{6}\, dy$$

$$f_X(x) = \frac{1}{3}[y]_0^x + \frac{1}{6}[y]_x^2 \implies$$

$$f_X(x) = \frac{1}{3}(x - 0) + \frac{1}{6}(2 - x) \implies$$

$$f_X(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{6} - \frac{x}{6} = \frac{x}{6} + \frac{1}{3}$$

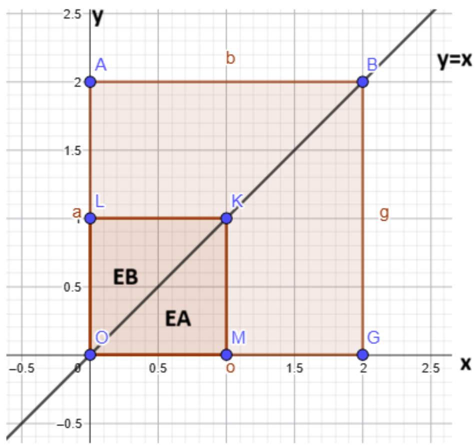
Άρα:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{1}{3}, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

**(γ)** Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(X < 1, Y < 1)$. Αυτό αντιστοιχεί στην ολοκλήρωση της $f_{X,Y}(x, y)$ πάνω στο τετράγωνο $0 \le x < 1, 0 \le y < 1$.
Το τετράγωνο $0 \le x < 1, 0 \le y < 1$ χωρίζεται σε δύο τρίγωνα από την $y = x$:

- $E_A$: $y \le x$, όπου $f = 1/3$. (Κάτω τρίγωνο)
- $E_B$: $y > x$, όπου $f = c = 1/6$. (Πάνω τρίγωνο)

Το εμβαδόν κάθε τριγώνου είναι $\text{Εμβαδόν}(E_A) = \text{Εμβαδόν}(E_B) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

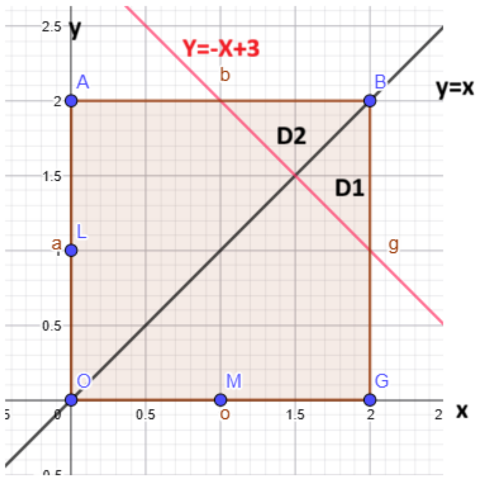



Σχήμα 2: Βοηθητικό σχήμα για εύρεση πιθανότητας.

Έχω:

$$P(X<1,Y<1)=\iint_{0\le x<1,0\le y<1} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\frac{1}{3}\cdot \text{Εμβαδόν}(E_A)+c\cdot \text{Εμβαδόν}(E_B)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2+1}{12}$$
$$P(X<1,Y<1)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0.25$$

**(δ)** Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(X+Y\ge 3)$.
Η ανισότητα $X+Y\ge 3$ ορίζει ένα μικρό τρίγωνο στην πάνω δεξιά γωνία του τετραγώνου, με κορυφές $(1,2),(2,1),(2,2)$.




Σχήμα 3: Βοηθητικό σχήμα για εύρεση πιθανότητας.

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση και φτιάχνοντας το βοηθητικό σχήμα:

$$P(X+Y\ge 3)=\iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\frac{1}{3}\cdot \text{Εμβαδόν}(D_1)+c\cdot \text{Εμβαδόν}(D_2)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{2+1}{24}$$
$$P(X+Y\ge 3)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}=0.125$$

## Άσκηση 2

Θεωρούμε τις τ.μ. $X$ και $Y$ με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c\cdot x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

**(α΄)** Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς $c$.

**(β΄)** Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(X+Y\ge 1)$.

**(γ΄)** Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $X$ και $Y$.

**(δ΄)** Είναι οι $X$ και $Y$ ανεξάρτητες τ.μ.;

**Λύση**
**(α)**

$$\int_0^1 \int_0^2 \left(cx^2 + \frac{xy}{3}\right) dy\, dx = 1$$

$$\int_0^1 \left[cx^2 y + \frac{xy^2}{6}\right]_0^2 dx = \int_0^1 (2cx^2 + \frac{2x}{3})\, dx = 1$$

$$\left[\frac{2c}{3}x^3 + \frac{x^2}{3}\right]_0^1 = 1$$

$$\frac{2c}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Longrightarrow c = 1.$$

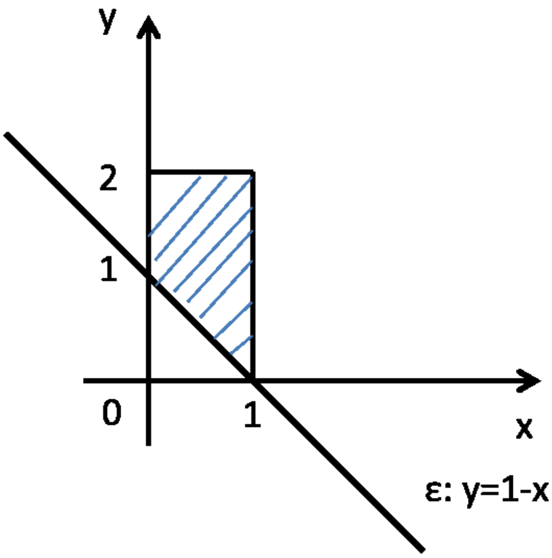
**(β)**

$$P(X + Y \geq 1) = \int_0^1 \int_{1-x}^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{6}\right]_{y=1-x}^2 dx$$

Με απλές πράξεις:

$$P(X + Y \geq 1) = \frac{65}{72}.$$




Σχήμα 4: Η ζητούμενη πιθανότητα $P(X + Y \geq 1)$.

**(γ)** Περιθωριακή $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_0^2 (x^2 + \frac{xy}{3})\, dy$$

$$= 2x^2 + \frac{2}{3}x, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Περιθωριακή $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x^2 + \frac{xy}{3})\, dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{2 + y}{6}, \qquad 0 \leq y \leq 2.$$

**(δ)** Δεν είναι ανεξάρτητες διότι:

$$f_{X,Y}(0.2, 0.3) \neq f_X(0.2)\, f_Y(0.3).$$

# Άσκηση 3

Αν οι τυχαίες μεταβλητές $X, Y$ έχουν κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le y \le 1, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

να βρεθούν:

**(i )** $f_X(x)$

**(ii )** $f_Y(y)$

**(iii )** $E[X]$

**(iv )** $\operatorname{var}(X)$

**(v )** $E[Y]$

**(vi )** $\operatorname{var}(Y)$

**(vii )** $\rho(X, Y)$

**Λύση**

**(i )**

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_x^1 8xy\, dy = 4x(1-x^2), \qquad 0 \le x \le 1.$$

**(ii )**

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_0^y 8xy\, dx = 4y^3, \qquad 0 \le y \le 1.$$

**(iii )**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^1 x(4x - 4x^3)\, dx = \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{4x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

**(iv )**

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^1 x^2(4x - 4x^3)\, dx = \left[x^4 - \frac{2x^6}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\operatorname{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225}.$$

**(v )**

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_0^1 y \cdot 4y^3\, dy = \left[\frac{4y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}.$$

**(vi )**

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\, dy = \int_0^1 y^2 \cdot 4y^3\, dy = \left[\frac{4y^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\operatorname{var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{2}{75}.$$

**(vii )**

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^y xy \cdot 8xy \, dx \, dy = 8 \int_0^1 y^2 \left( \int_0^y x^2 \, dx \right) dy = 8 \int_0^1 y^2 \cdot \frac{y^3}{3} \, dy = \frac{4}{9}.$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{4}{9} - \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{225}.$$

Τυπικές αποκλίσεις:

$$\sigma_X = \frac{\sqrt{11}}{15}, \qquad \sigma_Y = \frac{\sqrt{6}}{15}.$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{4/225}{(\sqrt{11}/15)(\sqrt{6}/15)} = \frac{4}{\sqrt{66}} \approx 0.4924.$$

## Άσκηση 4

Οι τυχαίες μεταβλητές $X$ και $Y$ είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέση τιμή $0$ και διασπορές $\mathrm{var}(X) = 2$, $\mathrm{var}(Y) = 3$. Επίσης, ισχύει ότι

$$E[XY] = 1.$$

Ορίζουμε τις τ.μ.

$$U = 2X - Y, \qquad V = |U|.$$

Να βρεθούν οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $U$ και $V$.

**Λύση**
Αφού οι $X$ και $Y$ είναι από κοινού Γκαουσιανές, τότε και κάθε γραμμικός μετασχηματισμός τους, όπως η τ.μ. $U = 2X - Y$, είναι επίσης Γκαουσιανός.

**(α) Κατανομή της** $U$
**Μέση τιμή:**

$$E[U] = E[2X - Y] = 2E[X] - E[Y] = 0.$$

**Διασπορά:**

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(U) &= \mathrm{var}(2X - Y) \\ &= 4 \ \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) - 4 \ \mathrm{cov}(X,Y) \\ &= 4 \cdot 2 + 3 - 4 \cdot 1 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Άρα:

$$U \sim \mathcal{N}(0, 7).$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U$ είναι:

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{14\pi}} \exp\left( -\frac{u^2}{14} \right).$$

**(β) Κατανομή της** $V = |U|$
Η $U$ είναι Γκαουσιανή με μέση τιμή $0$, άρα συμμετρική γύρω από το $0$. Για $v > 0$ έχουμε:

$$F_V(v) = P(|U| \le v) = P(-v \le U \le v) = F_U(v) - F_U(-v).$$

Επειδή η κανονική είναι συμμετρική:

$$F_U(-v) = 1 - F_U(v),$$

άρα:

$$F_V(v) = 2F_U(v) - 1.$$

Παίρνουμε παράγωγο ως προς $v$:

$$f_V(v) = \frac{d}{dv} F_V(v) = 2 f_U(v), \qquad v > 0.$$

Άρα:

$$f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{14\pi}} e^{-\frac{v^2}{14}}, & v > 0, \\ 0, & v \le 0. \end{cases}$$

## Άσκηση 5

Θεωρούμε την τ.μ. $X$ η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή:

$$X \sim \mathcal{U}(1, 2).$$

Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή ως εξής: $Y = e^{-2X}$.

**(α΄)** Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $X$, $f_X(x)$, καθώς και αυτή του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$.

**(β΄)** Να υπολογιστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y$, $F_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.

**(γ΄)** Να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $Y$, $f_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.

**(δ΄)** Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y \leq e^{-3})$.

**Λύση**

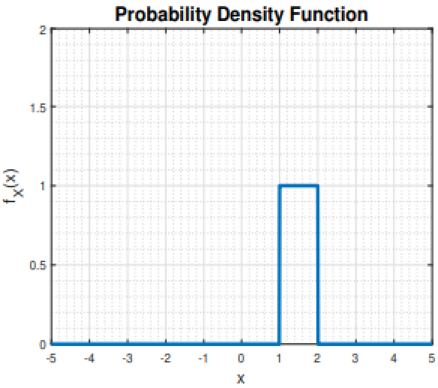
**(α)** Από την θεωρία γνωρίζουμε πως όταν η συνεχής τ.μ. $X$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [$a$, $b$], η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με βάση την εκφώνηση της Άσκησης, προκύπτει ότι: $a$ = 1, $b$ = 2.
Αρα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $X$, $f_X(x)$, φαίνεται στο Σχήμα 5 (περιορισμένη στο διάστημα [-5,5]).




Σχήμα 5: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.

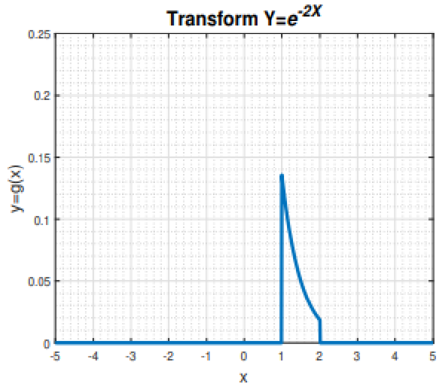
Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = g(X)$ φαίνεται στο Σχήμα 6 (περιορισμένη στο διάστημα [-5,5]).

**(β)** Η τ.μ. $Y$ παίρνει τιμές στο διάστημα [$e^{-4}, e^{-2}$] = [0.019448, 0.13534]. Άρα, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

α΄. Για $y < e^{-4}$, έχουμε:
$F_Y(y) = 0$

β΄. Για $e^{-4} \leq y \leq e^{-2}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < lny) = P(X > \frac{-lny}{2}) = \int_{\frac{-lny}{2}}^{\infty} 1\,dx = \int_{\frac{-lny}{2}}^{2} 1\,dx = [x]_{\frac{-lny}{2}}^{2} = 2 + \frac{lny}{2}$$




Σχήμα 6: Μετασχηματισμός $Y = g(X)$.

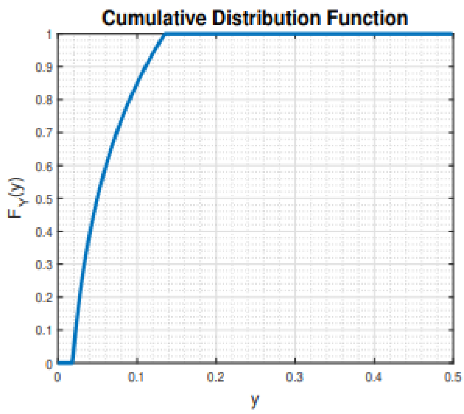
γ΄. Για $y > e^{-2}$, έχουμε:

$F_Y(y) = 1$

Άρα, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y, F_Y(y)$, θα είναι τελικά:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < e^{-4} \\ 2 + \dfrac{\ln y}{2}, & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 1, & y > e^{-2} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $F_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα [0, 0.5] που φαίνεται στο Σχήμα 7.




Σχήμα 7: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$.

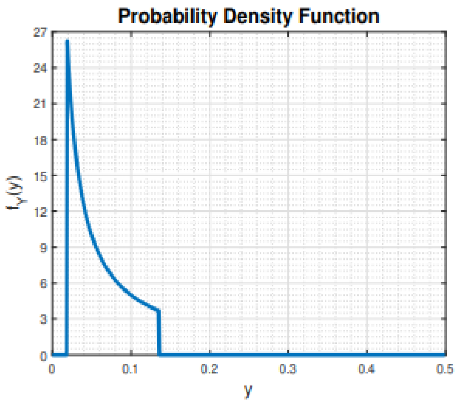
**(γ)** Με γνωστή την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

Με βάση την δοσμένη αθροιστική συνάρτηση κατανομής, έχουμε:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2y}, & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα [0, 0.5]) που φαίνεται στο Σχήμα 8.




Σχήμα 8: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$.

**(δ)** Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(Y \leq e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2}ln(e^{-3}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

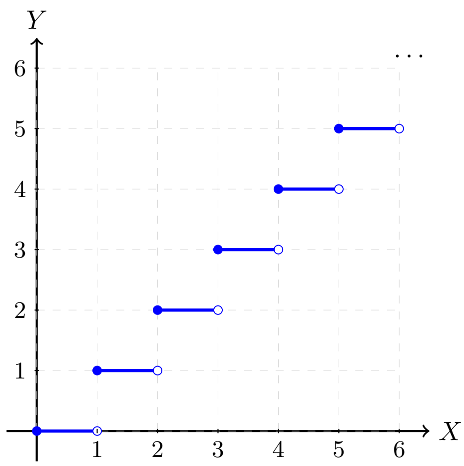
## Άσκηση 6 (Θέμα 5 τελικής εξέτασης 2023)

(Κβάντιση) Έστω $X \sim exp(\lambda)$ μία εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda$. Έστω $Y = g(X) = \lfloor X \rfloor$ το ακέραιο μέρος της $X$. Δηλαδή, αν $k \leq X < k+1$ τότε $Y = k$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$

- **(α΄)** Δώστε τη γραφική παράσταση του κβαντιστή $Y = g(X) = \lfloor X \rfloor$.
- **(β΄)** Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της $Y$ . Αναγνωρίζετε την κατανομή της τ.μ. $Y$ ; Ποια είναι η μέση τιμή, E[$Y$], και η διασπορά, $var(Y)$, της $Y$ ;

**Λύση**

**(α)** Η σχέση εισόδου-εξόδου του κβαντιστή $Y = g(X) = \lfloor X \rfloor$ φαίνεται στο Σχήμα 9. Πρόκειται για μια κλιμακωτή συνάρτηση, όπου για κάθε διάστημα $[k, k+1)$ η τιμή της εξόδου παραμένει σταθερή και ίση με $k$.




Σχήμα 9: Συνάρτηση κβάντισης $Y = \lfloor X \rfloor$.

**(β)** Προφανώς, η τ.μ. $Y$ είναι διακριτή και παίρνει τιμές $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, δηλαδή όλους τους φυσικούς αριθμούς. Διακριτή τ.μ!!! Η συνάρτηση πιθανότητας της $Y$ υπολογίζεται ως εξής:

$$P_Y(k) = P(Y = k) = P(k \leq X < k+1) = F_X(k+1) - F_X(k)$$

Γνωρίζουμε ότι $X \sim exp(\lambda)$, επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) είναι $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ για $x \geq 0$, και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) είναι $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Συνεπώς:

$$P_Y(k) = \left(1 - e^{-\lambda(k+1)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda k}\right) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$$

Άρα, η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$P_Y(k) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Παρατηρούμε ότι η τ.μ. $Y$ έχει συνάρτηση πιθανότητας της μορφής:

$$P_Y(k) = (1 - p)p^k, \quad \text{με } p = e^{-\lambda}$$

Συνεπώς, αναγνωρίζουμε ότι η $Y$ ακολουθεί **Γεωμετρική κατανομή** με παράμετρο $p = e^{-\lambda}$, δηλαδή $Y \sim Geo(e^{-\lambda})$.
Χρησιμοποιώντας τους τύπους για τη μέση τιμή και τη διασπορά της γεωμετρικής κατανομής (για $k = 0, 1, 2 \ldots$), έχουμε:

- Μέση Τιμή:

$$E[Y] = \frac{1}{p} = e^{\lambda}$$

- Διασπορά:

$$var(Y) = \frac{1 - p}{p^2} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{e^{-2\lambda}}$$

# Άσκηση 7

**(α΄)** Δύο όργανα μετρούν την ίδια απόσταση $L$. Το σφάλμα μέτρησης του πρώτου οργάνου είναι τυχαία μεταβλητή $E_1 \sim N(0, (0.006L)^2)$, ενώ του δεύτερου είναι $E_2 \sim N(0, (0.004L)^2)$. Οι μετρήσεις είναι ανεξάρτητες και κάθε όργανο μετράει $M_i = L + E_i$. Ορίζουμε ως μέσο των δύο μετρήσεων τη μεταβλητή $\overline{M} = \frac{M_1 + M_2}{2}$. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|\overline{M} - L| \leq 0.5\%L)$ και εκφράστε την ως τιμή της αθροιστικής συνάρτησης της τυπικής κανονικής κατανομής, $\Phi(u)$.

**(β΄)** Έστω $X$ και $Y$ ανεξάρτητες και ισόνομες $(i.i.d.)$ τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $\mu$ και διασπορά $\sigma^2$. Ορίζουμε τις μεταβλητές $Z = aX + bY$ και $W = aX - bY$, όπου $a, b$ σταθερές. Υπολογίστε τον συντελεστή συσχέτισης $\rho_{Z,W}$.

**Λύση**
**(α)** Το σφάλμα του μέσου όρου ορίζεται ως:

$$E = \overline{M} - L = \frac{E_1 + E_2}{2}$$

Επειδή οι $E_1, E_2$ είναι ανεξάρτητες κανονικές μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή, η $E$ είναι επίσης κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά:

$$var(E) = \frac{var(E_1)}{2^2} + \frac{var(E_2)}{2^2} = \frac{(0.006L)^2 + (0.004L)^2}{4}$$

Η τυπική απόκλιση της $E$ είναι:

$$\sigma_E = L\sqrt{\frac{0.006^2 + 0.004^2}{4}} \approx L \cdot 0.003606$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την $P(|E| \leq 0.005L)$. Ορίζουμε:

$$u = \frac{0.005L}{\sigma_E} = \frac{0.005}{0.003606} \approx 1.38675$$

Συνεπώς, η πιθανότητα εκφράζεται ως:

$$P(|\overline{M} - L| \leq 0.005L) = \Phi(u) - \Phi(-u) = 2\Phi(1.38675) - 1$$

**(β)** Υπολογίζουμε αρχικά τις διασπορές των $Z$ και $W$:

$$var(Z) = a^2 var(X) + b^2 var(Y) = (a^2 + b^2)\sigma^2$$

$$var(W) = a^2 var(X) + (-b)^2 var(Y) = (a^2 + b^2)\sigma^2$$

Η συνδιασπορά υπολογίζεται ως εξής:

$$cov(Z, W) = cov(aX + bY, aX - bY) = a^2 var(X) - b^2 var(Y) = (a^2 - b^2)\sigma^2$$

(καθώς $cov(X, Y) = 0$ λόγω ανεξαρτησίας). Ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{Z,W}$ είναι:

$$\rho_{Z,W} = \frac{cov(Z, W)}{\sqrt{var(Z)var(W)}} = \frac{(a^2 - b^2)\sigma^2}{(a^2 + b^2)\sigma^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$