

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 6

Άσκηση 1

Έστω ότι η από κοινού σ.π.π δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} cy^2 & , 0 \leq x \leq 2 \text{ και } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- (α) Προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς c .
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(X + Y > 2)$.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(Y \leq 0.5)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(X \leq 1)$.
- (ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(X = 3Y)$.

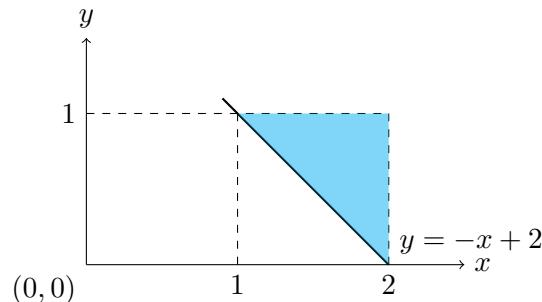
Λύση

(α)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 cy^2 dx dy = \int_0^1 2cy^2 dy = 2c/3 \Rightarrow c = 3/2$$

(β)

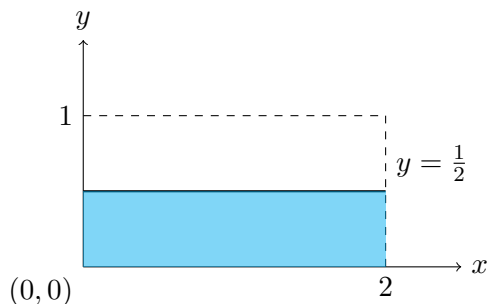
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y > 2) &= \int_1^2 \int_{2-X}^1 cy^2 dy dx = \int_1^2 c \left[\frac{y^3}{3} \right]_{2-X}^1 dx = \int_1^2 \frac{c}{3} (1 - (2-X)^3) dx \\ &= \int_1^2 \frac{c}{3} - \int_1^2 \frac{c}{3} (2-X)^3 dx = \frac{c}{3} - \int_0^1 \frac{c}{3} u^3 du \\ &= \frac{c}{3} - \frac{c}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$



Σχήμα 1: Χωρίο ερωτήματος β

(γ) Εντελώς ανάλογα:

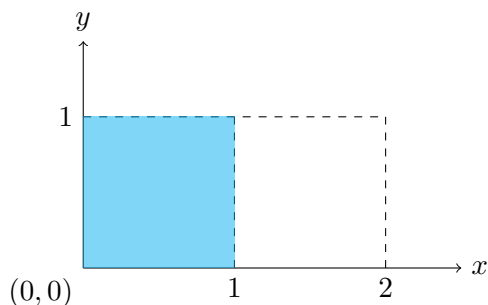
$$\mathbb{P}(Y \leq 2) = \int_0^2 \int_0^{1/2} cy^2 dy dx = \frac{1}{8}$$



Σχήμα 2: Χωρίο ερωτήματος γ

(δ) Εντελώς ανάλογα:

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \int_0^1 \int_0^1 cy^2 dy dx = \frac{1}{2}$$



Σχήμα 3: Χωρίο ερωτήματος δ

(ε) Η πιθανότητα $\mathbb{P}(X = 3Y)$ είναι 0 για κάθε συνεχή από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Άσκηση 2

Έστω ότι η από κοινού σ.π.π δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τον τύπο:

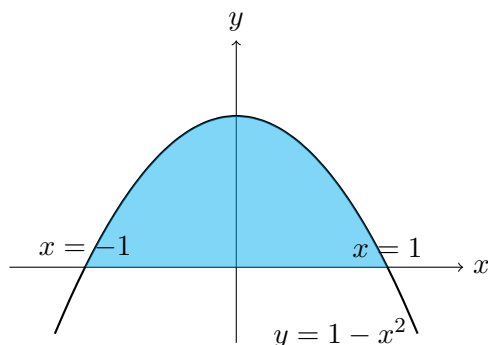
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{15}{4}x^2 & , 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε τις περιθώριες σ.π.π.

(β) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες ; Εξηγήστε την απάντησή σας.

Λύση

(α) Το χωρίο στο οποίο η σ.π.π είναι μη μηδενική φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Χωρίο ερωτήματος α

Μπορούμε να δούμε ότι οι πιθανές τιμές της ΤΜ X βρίσκονται στο διάστημα $0 \leq X \leq 1$, επομένως $f_1(x) = 0$ για τιμές εκτός αυτού του διαστήματος αλλιώς:

$$\int_0^{1-x^2} f(x, y) dy = \int_0^{1-x^2} \frac{15}{4} x^2 dy = \left[\frac{15}{4} x^2 y \right]_{y=0}^{y=1-x^2} = \frac{15}{4} x^2 (1 - x^2)$$

Ανάλογα ισχύει ότι $0 \leq Y \leq 1$ και $0 \leq y \leq 1 - x^2$ άρα $f_2(x) = 0$ για τιμές εκτός του διαστήματος και $x \leq \sqrt{1-y}$ και $x \geq -\sqrt{1-y}$ άρα:

$$\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx = \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \frac{15}{4} x^2 dx = \left[\frac{15}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{x=-\sqrt{1-y}}^{x=\sqrt{1-y}} = \frac{5}{2} (1 - y)^{\frac{3}{2}}$$

(β) Δεν είναι ανεξάρτητες διότι $f(x, y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$

Άσκηση 3

Υποθέστε ότι στην εξέταση προόδου του ΗΥ-217 η βαθμολογία των φοιτητών ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 625 και διασπορά 100. Στην τελική εξέταση του μαθήματος βαθμολογία των φοιτητών ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 600 και διασπορά 150. Αν δύο φοιτητές δώσουν πρόοδο και 3 φοιτητές δώσουν τελικό, ποια η πιθανότητα ότι η μέση βαθμολογία των φοιτητών που έδωσαν πρόοδο είναι μεγαλύτερη από την μέση βαθμολογία των φοιτητών που έδωσαν τελικό ; (Θεωρήστε ότι η βαθμολογία των φοιτητών είναι ανεξάρτητη)

Λύση

Έστω $\bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ η μέση βαθμολογία της προόδου και $\bar{Y} = \frac{1}{3}(Y_1 + Y_2 + Y_3)$ η μέση βαθμολογία του τελικού. Τότε:

$$E(\bar{X}) = 625 \text{ και } Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{100}{2} = 50$$

και

$$E(\bar{Y}) = 600 \text{ και } Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{150}{3} = 50$$

Τότε

$$E(\bar{X} - \bar{Y}) = 25 \text{ και } Var(\bar{X} - \bar{Y}) = 50 + 50 = 100$$

Ορίζουμε $Z = ((\bar{X} - \bar{Y}) - 25)/10 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ τότε:

$$\mathbb{P}(\bar{X} - \bar{Y} > 0) = \mathbb{P}(Z > -2.5) = \mathbb{P}(Z < 2.5) = \Phi(2.5) = 0.9938$$

Άσκηση 4

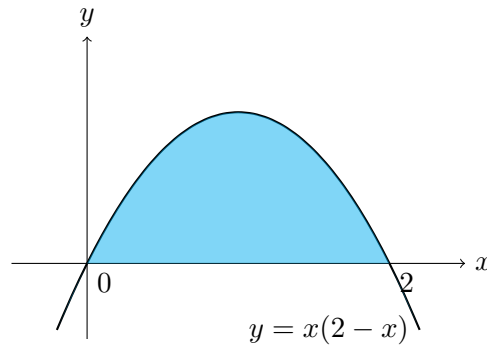
Έστω ότι η από κοινού σ.π.π δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- (α) Κάντε την αλλαγή μεταβλητής $Y = X(2 - X)$ και υπολογίστε την αθροιστική σ.π.π και την σ.π.π.
- (β) Κάντε την αλλαγή μεταβλητής $Y = 3X + 2$ και υπολογίστε την σ.π.π.

Λύση

- (α) Από το σχήμα 5 φαίνεται ότι όταν το X κυμαίνεται στο διάστημα $0 \leq x \leq 2$, το y κυμαίνεται στο διάστημα $0 \leq y \leq 1$



Σχήμα 5: Χωρίο άσκησης 3

Επομένως για $0 \leq y \leq 1$

$$\begin{aligned} G(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr[X(2 - X) \leq y] = \Pr(X^2 - 2X \geq -y) \\ &= \Pr(X^2 - 2X + 1 \geq 1 - y) = \Pr((X - 1)^2 \geq 1 - y) \\ &= \Pr(X - 1 \leq -\sqrt{1 - y}) + \Pr(X - 1 \geq \sqrt{1 - y}) \\ &= \Pr(X \leq 1 - \sqrt{1 - y}) + \Pr(X \geq 1 + \sqrt{1 - y}) \\ &= \int_0^{1 - \sqrt{1 - y}} \frac{1}{2}x \, dx + \int_{1 + \sqrt{1 - y}}^2 \frac{1}{2}x \, dx \\ &= \dots = 1 - \sqrt{1 - y} \end{aligned}$$

έπεται ότι:

$$g(y) = \frac{G(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{1 - y}}$$

- (β) Για X στο διάστημα $0 \leq x \leq 2$, το y κυμαίνεται στο διάστημα $2 \leq y \leq 8$

Για την αλλαγή μεταβλητής, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y , $g(y)$, υπολογίζεται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X , $f_X(x)$, με τον τύπο:

$$g(y) = f_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Από τη σχέση $Y = 3X + 2$, λύνουμε ως προς X :

$$X = \frac{Y - 2}{3}$$

Η παράγωγος $\frac{dx}{dy}$ υπολογίζεται ως:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}$$

Αντικαθιστώντας $X = \frac{Y-2}{3}$, έχουμε:

$$f_X\left(\frac{Y-2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Y-2}{3}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y είναι:

$$g(y) = f_X\left(\frac{Y-2}{3}\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Y-2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}(Y-2)$$

Άσκηση 5

Έστω X και Y τ.μ. με $E[X] = 1$, $E[Y] = 4$, $Var(X) = 4$, $Var(Y) = 9$, και συντελεστή συσχέτισης $\rho_{X,Y} = 0.1$.

(α) Αν $Z = 2(X + Y)(X - Y)$, βρείτε την $E[Z]$.

(β) Αν $T = 2X + Y$ και $U = 2X - Y$, βρείτε την συνδιασπορά των τ.μ. T και U , $Cov(T, U)$.

(γ) Αν $W = 3X + Y + 2$, βρείτε τις $E[W]$ και $Var(W)$.

Λύση:

(α) Αφού $Z = 2(X + Y)(X - Y) = 2(X^2 - Y^2)$, θα έχουμε:

$$E[Z] = 2(E[X^2] - E[Y^2]) = 2(Var(X) + E^2[X] - Var(Y) - E^2[Y]) = 2(4 + 1 - 9 - 4^2) = -40$$

(β) Έχουμε ότι:

$$Cov(T, U) = Cov(2X + Y, 2X - Y) = E[(2X + Y)(2X - Y)] - E[2X + Y]E[2X - Y]$$

$$= E[4X^2 - Y^2] - (2E[X] + E[Y])(2E[X] - E[Y])$$

$$= 4E[X^2] - E[Y^2] - 4(E[X])^2 + 2E[X]E[Y] - 2E[X]E[Y] + (E[Y])^2$$

$$= 4(E[X^2] - (E[X])^2) - (E[Y^2] - (E[Y])^2) = 4Var(X) - Var(Y) = 4 \cdot 4 - 9 = 7$$

(γ)

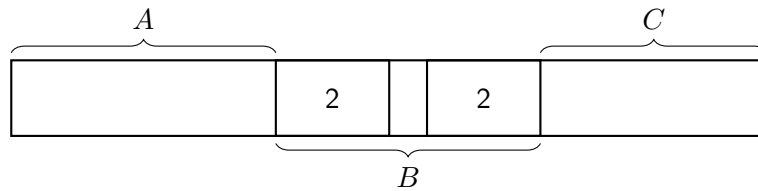
$$E[W] = E[3X + Y + 2] = 3E[X] + E[Y] + 2 = 3 \cdot 1 + 4 + 2 = 9$$

$$Var(W) = Var(3X + Y + 2) = 9Var(X) + Var(Y) + 6Cov(X, Y) = 48.6$$

$$\text{όπου } Cov(X, Y) = \rho\sqrt{Var(X)Var(Y)} = 0.1\sqrt{4 \cdot 9} = 0.6.$$

Άσκηση 6

Μία ευθεία ράβδος κατασκευάζεται ενώνοντας 3 κομμάτια A, B, C όπου το κάθε ένα κατασκευάζεται σε διαφορετικό μηχάνημα. Το μήκος του κομματιού A ακολουθεί την Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 20 μέτρων και διασπορά 0.04. Το B ακολουθεί επίσης την Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 14 μέτρων και διασπορά 0.01. Τέλος το κομμάτι C ακολουθεί την Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 26 μέτρων και διασπορά 0.04. Τα μήκη των κομματιών είναι ανεξάρτητα ανά δύο. Όπως φαίνεται στο σχήμα 6 τα τρία κομμάτια ενώνονται και σε κάθε σύνδεση έχουν επικάλυψη 2 μέτρων. Αν η ράβδος πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός αεροπλάνου μόνο αν παραχθεί με μήκος μεταξύ 55.7 και 56.3 μέτρων ποια είναι η πιθανότητα να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ;



Σχήμα 6: Η ράβδος

Λύση

Το συνολικό μήκος της ράβδου είναι $X = A + B + C - 4$. Αφού X γραμμικός συνδυασμός των A , B , και C , θα ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή με:

$$E(X) = 20 + 14 + 26 - 4 = 56$$

και $Var(X) = 0.04 + 0.01 + 0.04 = 0.09$, εφόσον A, B, C ανεξάρτητα. Θέτουμε $Z = (X - 56)/0.3$, τότε η Z θα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1 τότε,

$$\Pr(55.7 < X < 56.3) = \Pr(-1 \leq Z \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6827.$$