

Άσκηση 1 (Τελική Ιανουάριος 2024) Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot (1 - 0.2|x|), & |x| \leq 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

όπου c μια σταθερά.

(α) Υπολογίστε την τιμή του c και σχεδιάστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .

(γ) Υπολογίστε και σχεδιάστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Α.Σ.Κ.) $F_X(x)$.

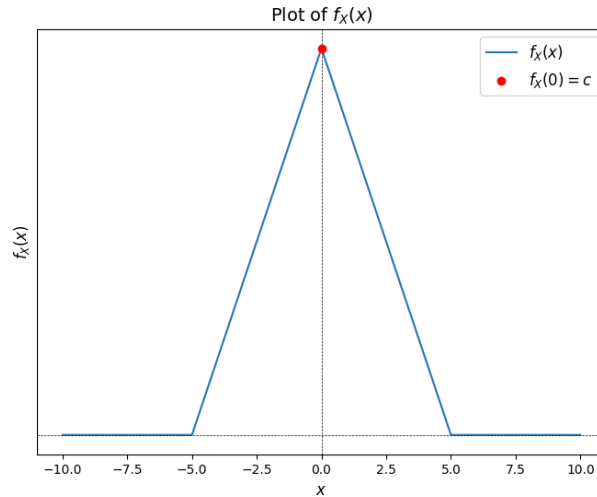
(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X| > 4)$.

Λύση:

(α) Για να είναι η $f_X(x)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1.$$

Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της $f_X(x)$ θα είναι της μορφής:



Σχήμα 1: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.

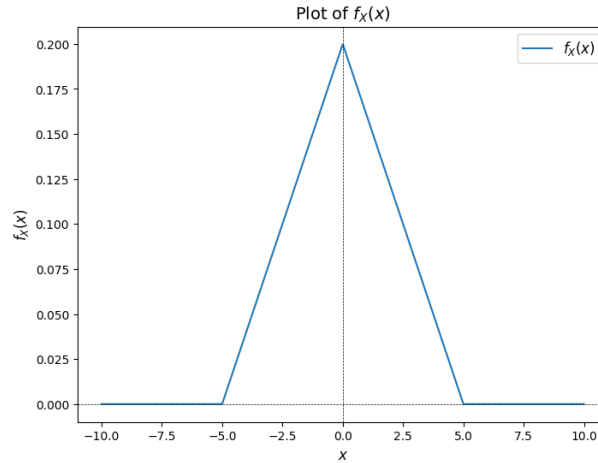
Επομένως, ακολουθώντας το σχήμα,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 &\Leftrightarrow \\ E_{\text{τριγώνου}} = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} 10 \cdot c = 1 \Leftrightarrow \\ c &= \frac{1}{5} = 0.2. \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{25}|x|, & |x| \leq 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

και η γραφική παράσταση της $f_X(x)$ θα είναι:



Σχήμα 2: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$, $c = 0.2$.

(β) Από το σχήμα, βλέπουμε ότι η $f_X(x)$ είναι άρτια συνάρτηση, συνεπώς $\mathbb{E}[X] = 0$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] \\ &= 2 \int_0^5 (0.2 - 0.04x)x^2 dx = \int_0^5 0.4x^2 dx - \int_0^5 0.08x^3 dx \\ &= \left[\frac{0.4x^3}{3} \right]_0^5 - \left[\frac{0.08x^4}{4} \right]_0^5 = 4.17 \end{aligned}$$

(γ)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Προφανώς, για $x < -5$: $F_X(x) = 0$, ενώ για $x > 5$, $F_X(x) = 1$. Για $-5 \leq x < 0$,

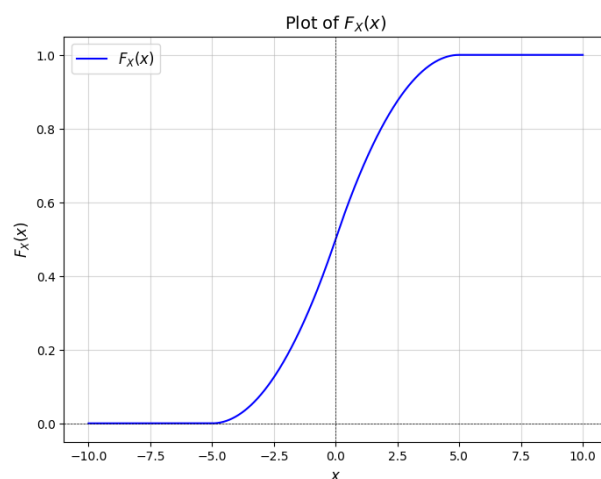
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{1}{5} \cdot \int_{-5}^x \left(1 + \frac{1}{5}t\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{5}t \right]_{-5}^x + \left[\frac{0.04 \cdot t^2}{2} \right]_{-5}^x \\ &= 0.2x + 1 + 0.02x^2 - 0.5 \\ &= 0.02x^2 + 0.2x + 0.5. \end{aligned}$$

Για $0 \leq x \leq 5$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-5}^0 \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{5}t\right) dt + \int_0^x \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5}t\right) dt \\ &= 0.5 + [0.2t - 0.02t^2]_0^x \\ &= -0.02x^2 + 0.2x + 0.5. \end{aligned}$$

Άρα

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ 0.02x^2 + 0.2x + 0.5, & -5 \leq x < 0 \\ -0.02x^2 + 0.2x + 0.5, & 0 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}.$$



Σχήμα 3: Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας $F_X(x)$.

(δ)

$$\begin{aligned} P(|X| > 4) &= 1 - P(|X| \leq 4) = 1 - P(-4 \leq X \leq 4) \\ &= 1 - (F_X(4) - F_X(-4)) \\ &= 1 + F_X(-4) - F_X(4) = 0.04. \end{aligned}$$

Άσκηση 2 Έστω συνεχής Τ.Μ. X , με Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} c - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν:

- (α) Η σταθερά c .
- (β) Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) της Τ.Μ. X , $f_X(x)$.
- (γ) Η μέση τιμή της Τ.Μ. X , $E[X]$.

Λύση: Στην περίπτωση που δίνεται η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής μίας Τ.Μ. X , και όχι η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας αυτής, η Συνθήκη Κανονικοποίησης λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \end{cases}$$

- (α) Σύμφωνα με την θεωρία, θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης. Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (c - \frac{4}{x^2}) = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

Άρα, τελικά, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

- (β) Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

- (γ) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} x \cdot \left(\frac{8}{x^3}\right) dx \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{8}{x^2} dx = 8 \left[-\frac{1}{x} \right]_2^{+\infty} = 8(0 + \frac{1}{2}) = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 3 (Τελική Ιανουάριος 2020) Η εσωτερική διάμετρος X (σε ίντσες) των σωλήνων από χαλκό που παράγει ένα εργοστάσιο ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 10 και διασπορά σ^2 : $X \sim \mathcal{N}(10, \sigma^2)$. Σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 ίντσες ανακυκλώνονται.

- (α) Αν $\sigma = 0.1$, να βρεθεί η πιθανότητα να ανακυκλωθούν ακριβώς 3 σωλήνες σε ένα δείγμα 5 σωλήνων.
- (β) Πόση πρέπει να είναι η τυπική απόκλιση του μήκους της εσωτερικής διαμέτρου των παραγόμενων σωληνών έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0.06;

Λύση:

- (α) Η πιθανότητα μία σωλήνα να είναι εκτός προδιαγραφών είναι $1 - P(|X - 10| \leq 0.1)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P &= 1 - P(|X - 10| \leq 0.1) = 1 - P(-0.1 \leq X - 10 \leq 0.1) \\ &= 1 - P\left(-\frac{0.1}{0.1} \leq \frac{X - 10}{0.1} \leq \frac{0.1}{0.1}\right) \\ &= 1 - (\Phi(1) - \Phi(-1)) = 1 - (\Phi(1) - (1 - \Phi(1))) \\ &= 2 - 2\Phi(1) = 2 - 2 \cdot 0.8413 = 0.3174 \end{aligned}$$

Έστω X το πλήθος των σωληνών (σε ένα δείγμα 5 σωληνών) που είναι ελαττωματικές. Τότε, $X \sim \Delta(n = 5, p = 0.3174)$, επομένως

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{5}{3} 0.3174^3 (1 - 0.3174)^{5-3} \\ &= 0.1490 \end{aligned}$$

- (β) Θέλουμε $1 - P(-0.1 \leq X - 10 \leq 0.1) = 0.06$.

$$\begin{aligned} P(-0.1 \leq X - 10 \leq 0.1) &= 0.94 \Leftrightarrow \\ P\left(-\frac{0.1}{\sigma} \leq \frac{X - 10}{\sigma} \leq \frac{0.1}{\sigma}\right) &= 0.94 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.94 \Leftrightarrow \\ \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right] &= 0.94 \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) - 1 = 0.94 \Leftrightarrow \\ \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) &= 0.97 \Rightarrow \frac{0.1}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \\ \sigma &= 0.0532 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

- (α) Δίνεται η τυχαία μεταβλητή $X \sim U[-2, 6]$, δηλαδή η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-2, 6]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 - 4X - 5 > 0$.
- (β) Η ποσότητα X της μπίρας που βρίσκεται σε ένα μπουκάλι 500 ml είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\mathcal{N}(500, 25)$, δηλαδή κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και διασπορά 25.
- (i) Ποιά είναι η πιθανότητα ένα μπουκάλι να περιέχει τουλάχιστον 490 ml;
- (ii) Έστω ότι αγοράζουμε τρία μπουκάλια. Ποιά η πιθανότητα και τα τρία να περιέχουν από 490 έως 505 ml μπίρας;

Σας δίνονται οι τιμές $\Phi(1) = 0.8413$ και $\Phi(2) = 0.9772$.

Λύση:

- (α) Εφόσον $X \sim U[-2, 6]$, θα είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{αν } -2 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $X^2 - 4X - 5 = (X + 1)(X - 5)$.

Οπότε, $X^2 - 4X - 5 > 0$ αν και μόνο αν $\{X < -1\} \cup \{X > 5\}$.

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 - 4X - 5 > 0) &= P(\{X < -1\} \cup \{X > 5\} \cap \{-2 \leq X \leq 6\}) \\ &= P(\{-2 \leq X < -1\} \cup \{5 < X \leq 6\}) \\ &= P(\{-2 \leq X < -1\}) + P(\{5 < X \leq 6\}) \\ &= \frac{1}{8}(-1 - (-2)) + \frac{1}{8}(6 - 5) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow P(X^2 - 4X - 5 > 0) &= 0.25. \end{aligned}$$

- (β) Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{X-500}{5} \Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(i)

$$\begin{aligned} P(X \geq 490) &= P\left(\frac{X - 500}{5} \geq \frac{490 - 500}{5}\right) = P(Z \geq -2) \\ &= 1 - P(Z < -2) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0.9772. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(490 \leq X \leq 505) &= P\left(\frac{490 - 500}{5} \leq \frac{X - 500}{5} \leq \frac{505 - 500}{5}\right) = P(-2 < Z < 1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \\ &= 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185. \end{aligned}$$

Οπότε, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$0.8185^3 = 0.54837.$$

Άσκηση 5 Εστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή $\mu = -6$ και διασπορά $\sigma^2 = 9$, δηλαδή $X \sim N(-6, 9)$ και η τ.μ. Y ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή $\mu = 1$ και διασπορά $\sigma^2 = 4$, δηλαδή $Y \sim N(1, 4)$. Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες:

- (α) $P(X = -6)$.
- (β) $P(-4 < X < 2)$.
- (γ) $P(|Y| \geq \frac{5}{2})$.
- (δ) $P(X^2 + 8X + 15 < 0)$.
- (ε) Αν $Z = X + Y$, υπολογίστε την $P(Z < -4)$.

Λύση:

(α) Εφόσον η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, θα είναι $P(X = -6) = 0$.

(β)

$$\begin{aligned} P(-4 < X < 2) &= P(X < 2) - P(X < -4) = P\left(\frac{X+6}{3} < \frac{2+6}{3}\right) - P\left(\frac{X+6}{3} < \frac{-4+6}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) \approx \Phi(2.67) - \Phi(0.67) = 0.9962 - 0.7486 = 0.2476. \end{aligned}$$

Άρα, $P(-4 < X < 2) \approx 0.2476$.

(γ)

$$\begin{aligned} P\left(|Y| \geq \frac{5}{2}\right) &= P\left(\left\{Y \leq -\frac{5}{2}\right\} \cup \left\{Y \geq \frac{5}{2}\right\}\right) = P\left(Y \leq -\frac{5}{2}\right) + P\left(Y \geq \frac{5}{2}\right) \\ &= P\left(Y \leq -\frac{5}{2}\right) + 1 - P\left(Y \leq \frac{5}{2}\right) \\ &= P\left(\frac{Y-1}{2} \leq \frac{-\frac{5}{2}-1}{2}\right) + 1 - P\left(\frac{Y-1}{2} \leq \frac{\frac{5}{2}-1}{2}\right) = \Phi(-1.75) + 1 - \Phi(0.75) \\ &= 1 - \Phi(1.75) + 1 - \Phi(0.75) = 1 - 0.9599 + 1 - 0.7734 \\ &= 0.0401 + 0.2266 = 0.2667. \end{aligned}$$

Άρα, $P(|Y| \geq \frac{5}{2}) \approx 0.2667$.

(δ) Παρατηρούμε ότι $X^2 + 8X + 15 = (X+5)(X+3)$. Οπότε, θα ισχύει $X^2 + 8X + 15 < 0$, αν και μόνο αν $\{X > -5\} \cap \{X < -3\}$.

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 + 8X + 15 < 0) &= P(\{X > -5\} \cap \{X < -3\}) = P(-5 < X < -3) \\ &= P(X < -3) - P(X < -5) \\ &= P\left(\frac{X+6}{3} < \frac{-3+6}{3}\right) - P\left(\frac{X+6}{3} < \frac{-5+6}{3}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx \Phi(1) - \Phi(0.33) \\ &= 0.8413 - 0.6293 = 0.212. \end{aligned}$$

Τελικά, $P(X^2 + 8X + 15 < 0) \approx 0.212$.

- (ε) Ξέρουμε από τη θεωρία ότι το άθροισμα 2 ανεξάρτητων Γκαουσιανών τ.μ. X, Y με μέση τιμή μ_1, μ_2 και διασπορά σ_1^2, σ_2^2 αντίστοιχα θα είναι επίσης μια Γκαουσιανή τ.μ. με μέση τιμή $\mu = \mu_1 + \mu_2$ και διασπορά $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Έτσι:

$$Z \sim N(-6 + 1, 9 + 4) \Leftrightarrow Z \sim N(-5, 13).$$

Άρα

$$P(Z < -4) = P\left(\frac{Z + 5}{\sqrt{13}} < \frac{-4 + 5}{\sqrt{13}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) \approx \Phi(0.28) = 0.6103.$$

Συνεπώς, $P(Z < -4) \approx 0.6103$.

Άσκηση 6 Μια εταιρεία κατασκευάζει και τοποθετεί ανελκυστήρες σε πολυκατοικίες. Η διάρκεια ζωής (σε χρόνια) αυτών των ανελκυστήρων μοντελοποιείται με μια εκθετική κατανομή X με μέση τιμή $E[X] = 5$ χρόνια.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ένας ανελκυστήρας να συνεχίζει να λειτουργεί ακόμα μετά από 6 χρόνια;

(β) Τι ποσοστό των ασανσέρ θα συνεχίζει να λειτουργεί για περισσότερο από 3, αλλά λιγότερο από 7 χρόνια;

(γ) Αν τα A και B είναι τα γεγονότα των ερωτημάτων (α) και (β) αντίστοιχα, είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα;

(δ) Η εταιρεία δεσμεύεται να αντικαταστήσει το ασανσέρ αν παρουσιαστεί βλάβη σε διάστημα μικρότερο του χρόνου εγγύησης. Για πόσα χρόνια μπορεί να δίνει η εταιρεία εγγύηση, προκειμένου το ποσοστό των ανελκυστήρων που αντικαθιστά να είναι μικρότερο από 10%;

Λύση: Μας δίνεται ότι η τ.μ. X ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $E[X] = 5 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5} = 0.2$. Έτσι:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x} & , \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι, για οποιοδήποτε $\alpha \geq 0$, ισχύει:

$$P(X \geq \alpha) = P(X > \alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} 0.2e^{-0.2x} dx = [-e^{-0.2x}]_{\alpha}^{+\infty} = 0 - (-e^{-0.2\alpha}) = e^{-0.2\alpha}$$

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X > 6) = e^{-0.2 \times 6} = e^{-1.2} \approx 0.30119 \Rightarrow \boxed{P(X > 6) \approx 0.30119}$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P(3 < X < 7) &= P(X > 3) - P(X > 7) = e^{-0.2 \times 3} - e^{-0.2 \times 7} \\ &= e^{-0.6} - e^{-1.4} \approx 0.54881 - 0.2466 = 0.30221 \end{aligned}$$

Έτσι, τελικά $\boxed{P(3 < X < 7) \approx 0.30221}$, δηλαδή το 30% των ασανσέρ θα συνεχίσει να λειτουργεί για περισσότερο από 3 αλλά λιγότερο από 7 χρόνια.

(γ) Έχουμε:

- $A = \{X > 6\}$, με $P(A) \approx 0.30119$
- $B = \{3 < X < 7\}$, με $P(B) \approx 0.30221$

Είναι $P(A)P(B) \approx 0.30119 \times 0.30221 \approx \underline{0.091}$.

Ακόμα:

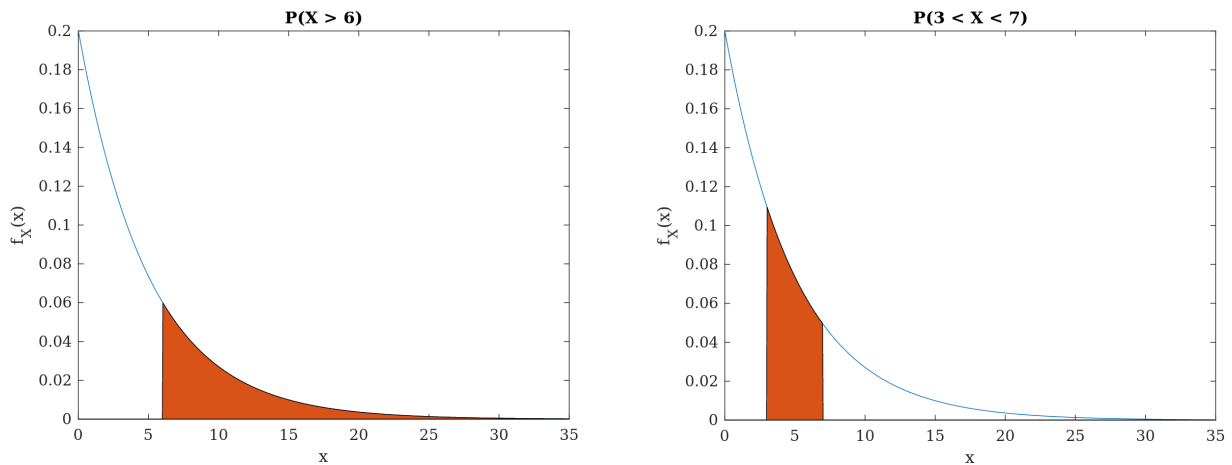
$$\begin{aligned} A \cap B = \{6 < X < 7\}, \text{ με } P(A \cap B) &= P(X > 6) - P(X > 7) = e^{-1.2} - e^{-1.4} \\ &\approx 0.30119 - 0.2466 = \underline{0.05459} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, οπότε τα γεγονότα A, B δεν είναι ανεξάρτητα

(δ) Θέλουμε να καθορίσουμε το χρόνο εγγύησης x , ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &\leq 0.1 \Leftrightarrow F_X(x) \leq 0.1 \Leftrightarrow 1 - e^{-0.2x} \leq 0.1 \Leftrightarrow e^{-0.2x} \geq 1 - 0.1 \Leftrightarrow e^{-0.2x} \geq 0.9 \\ &\Leftrightarrow \ln(e^{-0.2x}) \geq \ln(0.9) \Leftrightarrow -0.2x \geq \ln(0.9) \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{0.2} \ln(0.9) \Leftrightarrow x \leq -5 \ln(0.9) \\ &\Leftrightarrow x \leq -5(-0.105361) \Leftrightarrow \boxed{x \leq 0.526803} \end{aligned}$$

Αρα, για να αντικαθιστά η εταιρεία το πολύ 10% των ασανσέρ, θα πρέπει να δοθεί ως εγγύηση $0.526803 \approx$ μισός χρόνος



Σχήμα 4: Γραφική Αναπαράσταση των ερωτημάτων (α) και (β)