

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 4ο

Άσκηση 1

Έστω μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X , με συνάρτηση μάζας πιθανότητας (PMF) την ακόλουθη:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.1, & \text{για } x = 0.2 \\ 0.2, & \text{για } x = 0.4 \\ 0.2, & \text{για } x = 0.5 \\ 0.3, & \text{για } x = 0.8 \\ 0.2, & \text{για } x = 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (α') Βρείτε το πεδίο τιμών της τ.μ. X .
(β') Βρείτε την πιθανότητα $P(X \leq 0.5)$.
(γ') Βρείτε την πιθανότητα $P(0.25 < X < 0.75)$.
(δ') Βρείτε την πιθανότητα $P(X = 0.2 \mid X < 0.6)$.

Λύση:

- (α') Από την PMF βλέπουμε ότι οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η τ.μ. X είναι:

$$\{0.2, 0.4, 0.5, 0.8, 1\}.$$

(β')

$$P(X \leq 0.5) = P(X = 0.2) + P(X = 0.4) + P(X = 0.5) = 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.5.$$

(γ')

$$P(0.25 < X < 0.75) = P(X = 0.4) + P(X = 0.5) = 0.2 + 0.2 = 0.4.$$

- (δ') Γνωρίζουμε ότι:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Επομένως:

$$P(X = 0.2 \mid X < 0.6) = \frac{P(X = 0.2)}{P(X < 0.6)} = \frac{0.1}{0.1 + 0.2 + 0.2} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2.$$

Άσκηση 2

Μία τ.μ. X παίρνει τιμές $\{0, 1, 2, k\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, a\}$.

- (α') Να υπολογιστεί η πιθανότητα a .
(β') Αν $E[X] = \frac{8}{3}$, να βρεθεί η τιμή k .
(γ') Με βάση τα ερωτήματα (α), (β), να υπολογιστεί η διασπορά της X , $\text{var}(X)$.

Λύση

(α') Συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\sum_x p_X(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + a = 1 \Rightarrow \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{10}{30} + a = 1 \Rightarrow \frac{21}{30} + a = 1 \Rightarrow a = 1 - \frac{21}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}.$$

(β') Από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής:

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{3} + k \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + k \cdot \frac{3}{10}.$$

$$\text{Θέτοντας } E[X] = \frac{8}{3},$$

$$\frac{3}{10}k = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow k = \frac{9}{5} \cdot \frac{10}{3} = 6.$$

(γ') Υπολογίζουμε $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x) = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{5} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 6^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{4}{3} + \frac{108}{10} = \frac{6}{30} + \frac{40}{30} + \frac{324}{30} = \frac{370}{30} = \frac{37}{3}.$$

Άρα

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{37}{3} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{37}{3} - \frac{64}{9} = \frac{111 - 64}{9} = \frac{47}{9}.$$

Άσκηση 3

Γενετικές έρευνες έδειξαν πως το 5% των κατοίκων της Κρήτης διαθέτει το γονίδιο 'της λεβεντιάς'. Επιλέγουμε τυχαία 50 κατοίκους του νησιού.

(α') Κατά μέσο όρο, πόσοι από αυτούς περιμένουμε να έχουν το συγκεκριμένο γονίδιο;

(β') Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση Poisson για να υπολογίσετε την πιθανότητα *το πολύ 2* από αυτούς να το έχουν.

Λύση

(α') Κάθε άτομο έχει επιτυχία (έχει το γονίδιο) με πιθανότητα $p = 0.05$ ανεξάρτητα. Για $n = 50$ δοκιμές, η διωνυμική τ.μ. $X \sim \Delta(n = 50, p = 0.05)$ έχει μέση τιμή

$$E[X] = np = 50 \cdot 0.05 = 2.5.$$

(β') Για μικρό p και μέτριο np , η διωνυμική προσεγγίζεται από Poisson με παράμετρο $\lambda = np = 2.5$. Άρα

$$P(X \leq 2) \approx \sum_{k=0}^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-2.5} \left(1 + 2.5 + \frac{2.5^2}{2} \right) = e^{-2.5} (1 + 2.5 + 3.125) = 6.625 e^{-2.5} \approx 0.544.$$

Παρατήρηση: Η προσέγγιση Poisson είναι λογική εδώ, αφού $p = 0.05 \leq 0.1$ και $\lambda = np = 2.5 \leq 5$.

Άσκηση 4

(α') Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, υπολογίστε το $E\left[\frac{1}{X+1}\right]$.

(β') Αν $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ και $Y \sim \text{Bernoulli}(q)$, υπολογίστε το $E[(X+Y)^3]$ όταν X, Y είναι ανεξάρτητες.

(γ') Έστω X τ.μ. με μέση τιμή $E[X] = \mu$ και διασπορά $\text{var}(X) = \sigma^2$. Θέτουμε $\Delta(\theta) = E[(X - \theta)^2]$. Βρείτε το θ που ελαχιστοποιεί το $\Delta(\theta)$.

Λύση

(α') Για $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, με $p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$:

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^{\lambda} - 1) = \boxed{\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}}.$$

(β') Εφόσον $X, Y \in \{0, 1\}$, έχουμε $X^r = X$ και $Y^r = Y$ για κάθε $r \geq 1$. Με ανεξαρτησία:

$$(X + Y)^3 = X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3 = X + 3XY + 3XY + Y = X + 6XY + Y.$$

Άρα

$$E[(X + Y)^3] = E[X] + 6E[XY] + E[Y] = p + 6E[X]E[Y] + q = \boxed{p + q + 6pq}.$$

(γ') Αναπτύσσουμε:

$$\Delta(\theta) = E[(X - \theta)^2] = E[X^2] - 2\theta E[X] + \theta^2 = (\sigma^2 + \mu^2) - 2\theta\mu + \theta^2.$$

Παραγώγιση ως προς θ :

$$\frac{d\Delta}{d\theta} = 2\theta - 2\mu \Rightarrow \theta^* = \boxed{\mu}.$$

$$\text{Η ελάχιστη τιμή είναι } \Delta(\theta^*) = \sigma^2 + \mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = \boxed{\sigma^2}.$$

Άσκηση 5

Το ένα δέκατο των εργαλείων που κατασκευάζει μία εταιρεία είναι ελαττωματικά. Υπολογίστε την πιθανότητα, σε ένα τυχαίο δείγμα 10 εργαλείων, να βγουν **2 ακριβώς** εργαλεία ελαττωματικά:

(α') Χρησιμοποιώντας τη **Διωνυμική Κατανομή**.

(β') Προσεγγίζοντας τη Διωνυμική Κατανομή με μία **Κατανομή Poisson**.

Λύση

(α') Σύμφωνα με την εκφώνηση, η πιθανότητα επιλογής ελαττωματικού εργαλείου είναι $p = 0.1$. Αν η τ.μ. X παριστάνει το πλήθος των ελαττωματικών σε δείγμα $n = 10$ εργαλείων, τότε $X \sim \Delta(n = 10, p = 0.1)$ και

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.1^2 0.9^8 = 45 \cdot 0.01 \cdot 0.43046721 \approx \boxed{0.194}.$$

(β') Η Poisson που προσεγγίζει αυτή τη διωνυμική έχει

$$\lambda = np = 10 \cdot 0.1 = 1.$$

Γενικά, για $X \sim \text{Ποι}(\lambda)$ ισχύει

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Στην περίπτωσή μας,

$$P(X = 2) \approx e^{-1} \frac{1^2}{2!} = \frac{e^{-1}}{2} \approx \boxed{0.184}.$$

Παρατήρηση: Η προσέγγιση Poisson αποδίδει καλά όταν n είναι μεγάλο και p μικρό ($p \leq 0.1$) με $\lambda = np$ μέτριο.