

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 4

Άσκηση 1

Έστω μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X , με συνάρτηση μάζας πιθανότητας (PMF) την ακόλουθη:

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{για } x = 0.2 \\ 0.2 & \text{για } x = 0.4 \\ 0.2 & \text{για } x = 0.5 \\ 0.3 & \text{για } x = 0.8 \\ 0.2 & \text{για } x = 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (α) Βρείτε το πεδίο τιμών της τ.μ. X .
- (β) Βρείτε την πιθανότητα $P(X \leq 0.5)$.
- (γ) Βρείτε την πιθανότητα $P(0.25 < X < 0.75)$.
- (δ) Βρείτε την πιθανότητα $P(X = 0.2 | X < 0.6)$.

Λύση

(α) Από την PMF βλέπουμε ότι είναι οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η τ.μ. X είναι: $\{0.2, 0.4, 0.5, 0.8, 1\}$

(β)

$$\begin{aligned} P(X \leq 0.5) &= P(X = 0.2) + P(X = 0.4) + P(X = 0.5) = p_X(0.2) + p_X(0.4) + p_X(0.5) \\ &= 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.5 \end{aligned}$$

(γ)

$$P(0.25 < X < 0.75) = P(X = 0.4) + P(X = 0.5) = p_X(0.4) + p_X(0.5) = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

(δ) Γνωρίζουμε ότι:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Επομένως,

$$P(X = 0.2 | X < 0.6) = \frac{P(X = 0.2 \cap X < 0.6)}{P(X < 0.6)} = \frac{P(X = 0.2)}{P(X < 0.6)} =$$
$$\frac{p_X(0.2)}{p_X(0.2) + p_X(0.4) + p_X(0.5)} = \frac{0.1}{0.1 + 0.2 + 0.2} = 0.2$$

Άσκηση 2

Το ένα δέκατο των εργαλείων που κατασκευάζει μία εταιρεία είναι ελαττωματικά. Υπολογίστε την πιθανότητα, σε ένα τυχαίο δείγμα 10 εργαλείων να βγουν 2 ακριβώς εργαλεία ελαττωματικά:

(α) Χρησιμοποιώντας τη Διωνυμική κατανομή. (β) Προσεγγίζοντας τη Διωνυμική κατανομή με την κατανομή *Poisson*.

Λύση

(α) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, η πιθανότητα επιλογής ελαττωματικού εργαλείου είναι $p = 0.1$.

Εαν η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει το πλήθος των ελαττωματικών εργαλείων σε δείγμα 10 εργαλείων, τότε ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 10$ και $p = 0.1$. Έχουμε ότι:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^8 = 45 \cdot 0.01 \cdot 0.43 \approx \boxed{0.194}$$

(β) Η κατανομή *Poisson* που προσεγγίζει τη Διωνυμική αυτή κατανομή έχει:

$$\lambda = n \cdot p = 10 \cdot 0.1 = 1$$

Άρα, στην περίπτωση αυτή, έχουμε:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \quad \text{και} \quad P(X = 2) = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} \approx \boxed{0.184}$$

Παρατήρηση: Η προσέγγιση κατά *Poisson*, γενικά αποδίδει καλύτερα αποτελέσματα στις περιπτώσεις που $n \rightarrow \infty$ και $p \rightarrow 0$.

Άσκηση 3

Η πιθανότητα να αντιδράσει άσχημα ένας ασθενής σε μία ένεση είναι 0.001. Εάν η ένεση γίνει σε 2000 ασθενείς, υπολογίστε την πιθανότητα να αντιδράσουν άσχημα:

(α) Ακριβώς 3 ασθενείς. (β) Περισσότεροι από 2 ασθενείς.

Λύση

Έστω τυχαία μεταβλητή X που παριστάνει το πλήθος των ασθενών που θα αντιδράσουν άσχημα. Η X έχει Διωνυμική κατανομή, αλλά, επειδή η "άσχημη αντίδραση" είναι σπάνιο γεγονός (συνδυαστικά με το γεγονός ότι έχουμε ένα αρκούντως μεγάλο δείγμα ασθενών), μπορούμε να δεχθούμε ότι ακολουθεί κατανομή *Poisson*. Οπότε, έχουμε:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad \text{όπου } \lambda = n \cdot p = 2000 \cdot 0.001 = 2$$

Με βάση την προσέγγιση αυτή, έχουμε:

(α)

$$P(X = 3) = \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{3!} \approx \boxed{0.18}$$

(β)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - \left(\frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{e^{-2} \cdot 1}{1} + \frac{e^{-2} \cdot 2}{1} + \frac{e^{-2} \cdot 4}{2} \right) = 1 - 5e^{-2} \approx \boxed{0.323} \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ένας ακριβής υπολογισμός των ίδιων πιθανοτήτων με τη χρήση της Διωνυμικής κατανομής θα περιλάμβανε πολύ περισσότερο κόπο, δεδομένων των πολύ μεγάλων υπολογισμών που θα προέκυπταν.

Άσκηση 4

Μία εξέταση που αποτελείται από 10 ερωτήσεις Σ/Λ, ολοκληρώνεται μέσα σε 2 λεπτά, από την Μαρία την οποία την πήρε ο ύπνος κατά την διάρκεια της εξέτασης και ξύπνησε 2 λεπτά πριν την λήξη της. Η Μαρία, λόγω του λιγοστού χρόνου που της έχει μείνει, απαντάει τυχαία και τις 10 ερωτήσεις.

(α) Βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ερωτήσεων που απάντησε σωστά η Μαρία.

(β) Δεδομένου ότι για να περάσει η Μαρία το μάθημα, πρέπει να απαντήσει σωστά τουλάχιστον 7 ερωτήσεις, ποιά η πιθανότητα η Μαρία να μην έχει κοπεί;

Λύση

(α) Έστω X , η διακριτή τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των σωστών απαντήσεων που έδωσε η Μαρία. Η X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 10$ και $p = 0.5$ (εφόσον απαντάει τυχαία). Επομένως έχουμε:

$$E[X] = np = 10 * 0.5 = 5$$

$$var(X) = np(1 - p) = 10 * 0.5^2 = 2.5$$

$$\sigma = \sqrt{var(X)} = \sqrt{2.5} = 1.58$$

(β) Η πιθανότητα να περάσει η Μαρία το μάθημα είναι:

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X < 7) = 1 - (p_X(0) + p_X(1) + \dots + p_X(6)) = 0.172$$

=

$$P_X(0) = \binom{10}{0} 0.5^0 (1 - 0.5)^{10-0} = 0.001$$

$$P_X(1) = \binom{10}{1} 0.5^1 (1 - 0.5)^{10-1} = 0.01$$

$$P_X(2) = \binom{10}{2} 0.5^2 (1 - 0.5)^{10-2} = 0.044$$

...

Άσκηση 5

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X, Y δίνεται από τον παρακάτω πίνακα :

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

- (α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .
(β) Βρείτε την $P(Y < X)$.
(γ) Βρείτε την $P(Y > X)$.
(δ) Βρείτε την $P(Y = X)$.
(ε) Βρείτε την $P(Y = 3)$.
(στ) Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.
(ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές $E[X]$, $E[Y]$.
(η) Βρείτε τις διασπορές $var(X)$, $var(Y)$.
(θ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X = Y \mid X \leq Y)$.

Λύση

(α) Ισχύει :

$$\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$$

Έτσι, προσθέτουμε όλες τις τιμές του πίνακα και θέτουμε το άθροισμα ίσο με 1.

$$20c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{20}.$$

$$(\beta) P(Y < X) = c + 6c + 4c = 11c = 11/20.$$

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(ϒ) $P(Y > X) = 2c + c + c = 4c = 1/5$.

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	2c	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(δ) $P(Y = X) = 1 - P(Y < X) - P(Y > X) = 1 - \frac{11}{20} - \frac{1}{5} = 1/4$ (ε) $P(Y = 3) = c + c + 2c = 4c = 1/5$.

$y = 3$	c	c	2c
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(στ)

$$p_X(x) = \begin{cases} 3/10, & x = 1 \\ 1/10, & x = 2 \\ 3/5, & x = 3 \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & y = 1 \\ 3/10, & y = 2 \\ 1/5, & y = 3 \end{cases}$$

(ζ)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 3 = 2.3 \\ \mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1.7 \end{aligned}$$

(η)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot 9 = 6.1 \\ \mathbf{E}[Y^2] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 9 = 3.5 \\ \text{var}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = 6.1 - 2.3^2 = 0.81 \\ \text{var}(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - (\mathbf{E}[Y])^2 = 3.5 - 1.7^2 = 0.61 \end{aligned}$$

(θ) Για την πιθανότητα $P(X = Y | X \leq Y)$ έχω:

$$\begin{aligned} P(X = Y | X \leq Y) &= \frac{P(X = Y \cap X \leq Y)}{P(X \leq Y)} \\ &= \frac{p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(3,3)}{p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(1,3) + p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(3,3)} \\ &= \frac{(3 + 0 + 2)/20}{(2 + 1 + 1 + 3 + 0 + 2)/20} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$