

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 3

Βασικές Έννοιες Συνδιαστικής, Εισαγωγή στις Τυχαίες Μεταβλητές.

Επιμέλεια: Σκανδάλης Γιώργος

Άσκηση 1

Υπολογίστε τα παρακάτω:

- α) Το πλήθος των διαφορετικών αριθμών σταθερού τηλεφώνου που μπορούν να υπάρξουν στη Θεσσαλονίκη.
- β) Τον αριθμό των αρχικών πεντάδων μίας ομάδας μπάσκετ οι οποίες μπορούν να δημιουργηθούν με 13 διαθέσιμους παίκτες (Κάθε παίκτης έχει συγκεκριμένη θέση στην πεντάδα).
- γ) Τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά 12 άτομα.
- δ) Τον αριθμό πινακίδων αυτοκινήτου με 3 γράμματα και 4 αριθμούς οι οποίες μπορούν να δημιουργηθούν όταν χρησιμοποιούμε το ελληνικό αλφάβητο.
- ε) Τα διαφορετικά χέρια 7 χαρτιών που μπορούν να σχηματιστούν από μια τράπουλα.

Λύση

- α) Οι αριθμοί σταθερού τηλεφώνου έχουν 10 ψηφία, όμως για τη Θεσσαλονίκη τα πρώτα 2 είναι πάντα 23, οπότε μας μένουν 8 ψηφία, κάθε ένα από τα οποία έχει 10 πιθανές τιμές τις οποίες μπορεί να πάρει. Άρα συνολικά έχουμε: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$ αριθμοί.
- β) Αφού κάθε παίκτης έχει συγκεκριμένη θέση στην πεντάδα τότε σίγουρα μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τους επιλέγουμε. Άρα θέλουμε το πλήθος όλων των δυνατών πεντάδων από 13 άτομα που μπορούν να δημιουργηθούν όταν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής. Οπότε έχουμε $P(13, 5) \approx 154.000$ δυνατές αρχικές πεντάδες.

- γ) Για την πρώτη θέση στη σειρά έχουμε 12 δυνατές επιλογές, για την δεύτερη έχουμε 11, για την τρίτη 10 κ.ο.κ. Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων με τους οποίους μπορούν να διαταχθούν 12 άτομα είναι $12!$
- δ) Δεδομένου ότι το ελληνικό αλφάβητο έχει 24 γράμματα, κάθε ένα από τα γράμματα της πινακίδας έχει 24 διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει, οπότε συνολικά μπορούμε να σχηματίσουμε $24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3$ διαφορετικές τριάδες. Ακόμη, κάθε ένας από τους 4 αριθμούς της πινακίδας έχει 10 διαφορετικές τιμές τις οποίες μπορεί να πάρει, οπότε συνολικά έχουμε $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ διαφορετικές τετράδες αριθμών που μπορούμε να δημιουργήσουμε. Μπορούμε να θεωρήσουμε την κατασκευή της τριάδας γραμμάτων και της τετράδας αριθμών ως δύο στάδια στο πείραμα της κατασκευής της πινακίδας. Οπότε για να μπορέσουμε να βρούμε το συνολικό αριθμό πινακίδων που μπορούμε να φτιάξουμε αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό των ενδεχομένων του κάθε σταδίου. Άρα ο συνολικός αριθμός πινακίδων που μπορούν να δημιουργηθούν είναι: $24^3 \cdot 10^4 \approx 1.38 \cdot 10^8$
- ε) Η σειρά με την οποία είναι τοποθετημένα τα χαρτιά σε ένα χέρι δεν μας ενδιαφέρει, άρα θέλουμε όλες τις διαφορετικές επτάδες οι οποίες μπορούν να δημιουργηθούν από 52 φύλλα, όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επιλέγουμε τα στοιχεία της επτάδας. Άρα έχουμε $C(52, 7) \approx 133.000.000$ διαφορετικά χέρια τα οποία μπορούν να δημιουργηθούν.

Άσκηση 2

40 μαθητές Γυμνασίου και 30 μαθητές Λυκείου ταξιδεύουν σε δύο λεωφορεία 49 θέσεων το καθένα.

- α) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι μαθητές στα λεωφορεία αν πρέπει αναγκαστικά να γεμίσουν το ένα πριν μπουν στο άλλο?
- β) Με ποια πιθανότητα θα καθίσουν όλοι οι μαθητές του λυκείου στο ίδιο λεωφορείο αν δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το πως πρέπει να μοιραστούν στα λεωφορεία?

(στη συγκεκριμένη άσκηση η σειρά με την οποία κάθονται στο λεωφορείο μας ενδιαφέρει)

Λύση

- α) Αρχικά επιλέγουμε ένα από τα δύο λεωφορεία, το οποίο θα γεμίσουμε πλήρως. Έπειτα βρίσκουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούν 49 από τους 70 μαθητές να καθίσουν σε αυτό το λεωφορείο. Τέλος, πρέπει να βρούμε τους τρόπους με τους οποίους οι υπόλοιποι 21 μαθητές θα καθίσουν στις 49 θέσεις του δεύτερου λεωφορείου, δηλαδή ποιές από τις 49 θέσεις θα επιλέξουν. Οπότε συνολικά έχουμε

$$2 \cdot P(70, 49) \cdot P(49, 21) \approx 2.979 \cdot 10^{102} \text{ τρόποι.}$$

- β) Αρχικά θα βρούμε όλους τους τρόπους με τους οποίους οι 70 μαθητές μπορούν να καθίσουν στις 98 διαθέσιμες θέσεις των λεωφορείων, το πλήθος των οποίων είναι $P(98, 70)$. Έπειτα θέλουμε να βρούμε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορούν οι μαθητές του λυκείου να καθίσουν στο ίδιο λεωφορείο. Επιλέγουμε το ένα από τα δύο λεωφορεία. Στη συνέχεια θέλουμε τους τρόπους με τους οποίους 30 μαθητές μπορούν να καθίσουν σε 49 θέσεις, δηλαδή $P(49, 20)$. Τέλος, θέλουμε να βρούμε όλους τους τρόπους με τους οποίους οι υπόλοιποι 40

μαθητές μπορούν να καθίσουν στις 68 θέσεις οι οποίες απέμειναν, που είναι $P(68, 40)$. Οπότε ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να καθίσουν οι μαθητές είναι $2 \cdot P(49, 30)P(78, 40)$ και η πιθανότητα θα είναι:

$$P(\beta) = \frac{2 \cdot P(49, 30) \cdot P(68, 40)}{P(98, 70)} \approx 0.00000000056$$

Άσκηση 3 (εμπνευσμένο από Θέμα 2 της Προόδου 2022)

Στην τράπουλα, κάρτες με χρώμα ονομάζονται οι 10, J, Q, K, A. Έστω ότι σε ένα τραπέζι έχουμε 13 κάρτες της ίδιας "οικογένειας" (Μπαστούνι, Κούπα, Καρό, Σπαθί) τέλεια ανακατεμένες σε μία στοίβα, από την κορυφή της οποίας τραβάμε 4 κάρτες. Υπολογίστε:

- Την πιθανότητα η τετράδα να περιέχει ακριβώς k κάρτες χωρίς χρώμα, για $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
- Την πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον μία κάρτα χωρίς χρώμα στην τετράδα.
- Την πιθανότητα να έχουμε πάρει τρεις κάρτες με χρώμα και μία χωρίς, δεδομένου ότι γνωρίζουμε πως πήραμε μία κάρτα χωρίς χρώμα.
- Την πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον "δύο κάρτες με χρώμα και μία χωρίς".
- Είναι τα γεγονότα {υπάρχει τουλάχιστον μία κάρτα χωρίς χρώμα} και {υπάρχουν τουλάχιστον "δύο κάρτες με χρώμα και μία χωρίς χρώμα"} ανεξάρτητα?

Λύση

Αρχικά, υπολογίζουμε τον αριθμό των δυνατών τετράδων που μπορούν να δημιουργηθούν από 13 φύλλα, ο οποίος είναι $\binom{13}{4} = 715$ αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής.

- Για να έχουμε ακριβώς k κάρτες χωρίς χρώμα πρέπει από τις 8 κάρτες χωρίς χρώμα να διαλέξουμε k και από τις 5 κάρτες με χρώμα να διαλέξουμε $4-k$, δηλαδή έχουμε συνολικά $\binom{8}{k} \binom{5}{4-k}$ τέτοιες τετράδες, οπότε η πιθανότητα είναι:

$$P(A_k) = \frac{\binom{8}{k} \binom{5}{4-k}}{\binom{13}{4}}$$

- Για να βρούμε την πιθανότητα του γεγονότος θα μπορούσαμε να βρούμε την πιθανότητα να έχει μία κάρτα χωρίς χρώμα συν την πιθανότητα να έχει δύο κάρτες κλπ, δηλαδή $P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$. Όμως ένας πιο εύκολος τρόπος είναι το να βρούμε την πιθανότητα του συμπληρωματικού γεγονότος. Το συμπληρωματικό γεγονός σε αυτή την περίπτωση είναι το {δεν υπάρχει καμία κάρτα με χρώμα}, δηλαδή A_4 . Οπότε έχουμε:

$$P(B^c) = P(A_4) = \frac{\binom{8}{4} \binom{5}{0}}{\binom{13}{4}} = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{13}{4}} = \frac{70}{715} \approx 0.097$$

Οπότε η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον μία κάρτα με χρώμα στην τετράδα είναι: $1 - P(B^c) \approx 1 - 0.097 = 0.903$.

γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας. Το να πάρουμε τρεις κάρτες χωρίς χρώμα και μία με χρώμα είναι το A_3 , ενώ το δεύτερο γεγονός είναι αυτό του δεύτερου ερωτήματος, το B . Η τομή των δύο γεγονότων είναι το ίδιο το A_3 αφού για να υπάρχουν 3 κάρτες χωρίς χρώμα σίγουρα υπάρχει τουλάχιστον μία. Οπότε η πιθανότητα που θέλουμε είναι η:

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{\binom{8}{3}\binom{5}{1}}{\binom{13}{4}}}{0.903} \approx \frac{0.391}{0.903} \approx 0.433$$

δ) Το γεγονός μπορεί να περιγραφεί ως η ένωση των γεγονότων $\{\text{υπάρχουν τρεις κάρτες με χρώμα και μία χωρίς}\}$ και $\{\text{υπάρχουν δύο κάρτες με χρώμα και δύο χωρίς χρώμα}\}$, δηλαδή $\Delta = A_1 \cup A_2$. Τα γεγονότα αυτά είναι ξένα οπότε:

$$P(\Delta) = P(A_2) + P(A_1) = \frac{\binom{8}{2}\binom{5}{2}}{\binom{13}{4}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{5}{3}}{\binom{13}{4}} = \frac{280}{715} + \frac{80}{715} \approx 0.391 + 0.11 = 0.501$$

ε) Παρατηρούμε ότι $\Delta \cap B = \Delta$, αφού για να ισχύει το Δ πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία κάρτα χωρίς χρώμα, άρα τα γεγονότα αυτά δεν είναι ανεξάρτητα, γιατί $P(\Delta) \neq P(B)P(\Delta)$.

Άσκηση 4

Βρείτε όλους τους δυνατούς αναγραμματισμούς της λέξης BOOKKEEPER. Με ποια πιθανότητα ένας αναγραμματισμός θα ξεκινά με το γράμμα R?

Λύση

Η λέξη BOOKKEEPER έχει 10 γράμματα, από τα οποία 2 είναι K, 2 O, 3 E. Οπότε το πλήθος των δυνατών αναγραμματισμών που μπορεί να έχει είναι:

$$\frac{10!}{1!1!1!2!2!3!} = 151.200$$

Για να βρούμε την πιθανότητα ένας αναγραμματισμός να ξεκινά με το R πρέπει πρώτα να βρούμε το πλήθος αυτών των αναγραμματισμών. Αυτοί οι αναγραμματισμοί όμως είναι ισοδύναμοι με τους αναγραμματισμούς των υπόλοιπων 9 γραμμάτων της λέξης στην αρχή των οποίων έπειτα θα "κολλήσουμε" το γράμμα R. Το πλήθος αυτών των αναγραμματισμών είναι:

$$\frac{9!}{1!1!2!2!3!} = 15.120$$

Άρα προφανώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(R) = \frac{1}{10}$.

Άσκηση 5 - Θέμα 3 Πρόοδος 2010

Ένας αφηρημένος καθηγητής έχει στην τσέπη του n κλειδιά από τα οποία μόνο ένα (δεν θυμάται ποιό...) ταιριάζει στην πόρτα του γραφείου του. Επιλέγει τυχαία ένα κλειδί και το δοκιμάζει στην κλειδαριά. Αν δεν ταιριάζει, επιλέγει ένα άλλο και ξαναπροσπαθεί μέχρις ότου επιλέξει το σωστό κλειδί και ξεκλειδώσει την πόρτα του. Ορίζουμε την τ.μ. X ως το πλήθος των κλειδιών που δοκιμάζει (συμπεριλαμβανομένου και του τελευταίου με το οποίο ανοίγει τελικά την πόρτα). Υπολογίστε την συνάρτηση πιθανότητας $p_X(k)$, και την μέση τιμή, $E[X]$, σε κάθε μία από τις επόμενες δύο περιπτώσεις:

- α) Ένα κλειδί το οποίο δεν ανοίγει την πόρτα μπαίνει πάλι πίσω στην τσέπη του, έτσι ώστε όταν επιλέγει το επόμενο, καθένα από τα n κλειδιά επιλέγονται με την ίδια πιθανότητα (δειγματοληψία με επανάθεση).
- β) Ένα κλειδί το οποίο δεν ανοίγει την πόρτα τοποθετείται στην άκρη (π.χ. στην τσάντα του), έτσι ώστε το επόμενο κλειδί επιλέγεται τυχαία από τα εναπομείναντα στην τσέπη του (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση).

Ποια από τις δύο στρατηγικές είναι προτιμότερη?

Λύση

- α) Όταν ο καθηγητής βάζει πίσω στην τσέπη του το λάθος κλειδί, δηλαδή επιλέγει με επανάθεση, έχουμε ουσιαστικά μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 1/n$ και αποτυχίας $1 - p = 1 - 1/n$. Η τ.μ. X είναι το πλήθος των προσπαθειών έως την πρώτη επιτυχία και επομένως, $X \sim \text{Γεωμετρική}(p = 1/n)$. Συνεπώς

$$p_X(k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n}; k = 1, 2, 3, \dots$$

Και

$$E[X] = \frac{1}{p} = n.$$

- β) Όταν ο καθηγητής βάζει στην άκρη το λάθος κλειδί, δηλαδή επιλέγει χωρίς επανατοποθέτηση, η τ.μ. X μπορεί να πάρει τιμές $X = 1, 2, 3, \dots, n$. Το γεγονός $\{X = k\}, k = 1, 2, 3, \dots, n$ συμβαίνει όταν το σωστό κλειδί βγαίνει k -στό στη σειρά από την τσέπη του. Σκεφτόμαστε λοιπόν μια διάταξη των n κλειδιών στην τσέπη του καθηγητή. Υπάρχουν $n!$ τέτοιες διατάξεις (το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων) και ο καθηγητής βγάζει τα κλειδιά από την τσέπη του με τη σειρά που έχουν διαταχθεί. Ακριβώς $(n - 1)!$ από όλες τις $n!$ διατάξεις έχουν το σωστό κλειδί ως k -στό στη σειρά (καθώς τα $n - 1$ λάθος κλειδιά καταλαμβάνουν τις $n - 1$ άλλες θέσεις με $(n - 1)!$ τρόπους). Συνεπώς,

$$P(X = k) = \frac{(n - 1)!}{n!} = \frac{1}{n} \text{ για } k = 1, 2, \dots, n.$$

Άρα σε αυτή την περίπτωση, η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με πεδίο τιμών $\{1, 2, \dots, n\}$. Συνεπώς $E[X] = \frac{n+1}{2}$. Βλέπουμε ότι η στρατηγική που βάζει τα λάθος κλειδιά στην άκρη αντί να τα τοποθετεί πάλι πίσω στην τσέπη μειώνει το μέσο όρο προσπαθειών σχεδόν στο μισό!