

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 2

Άσκηση 1

Από τους ασθενείς που νοσηλεύονται σε μια κλινική, το 60% έχει καρδιακή ανεπάρκεια, το 50% έχει πνευμονική ανεπάρκεια και το 35% έχει και τα δύο. Βρείτε τις πιθανότητες:

- α) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
- β) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν δεν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
- γ) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν είναι γνωστό ότι δεν έχει και τα δύο προβλήματα.

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$K = \{\text{ένας ασθενής έχει καρδιακή ανεπάρκεια}\}$$
$$\Pi = \{\text{ένας ασθενής έχει πνευμονική ανεπάρκεια}\}$$

Τότε ξέρω ότι

$$P(K) = \frac{60}{100} = 0.6, P(\Pi) = \frac{50}{100} = 0.5 \text{ και } P(K \cap \Pi) = \frac{35}{100} = 0.35$$

- α) Ψάχνω την πιθανότητα $P(K | \Pi)$. Άρα από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$P(K | \Pi) = \frac{P(K \cap \Pi)}{P(\Pi)} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7$$

- β) Ψάχνω την πιθανότητα

$$P(K | \Pi^c) = \frac{P(K \cap \Pi^c)}{P(\Pi^c)}$$

Ξέρουμε ότι για δυο ενδεχόμενα K, Π ισχύει ότι $K \cap \Pi^c = K - \Pi$ και $P(K - \Pi) = P(K) - P(K \cap \Pi)$. Άρα έχουμε:

$$P(K | \Pi^c) = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(\Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.5} = 0.5$$

- γ) Ψάχνω την πιθανότητα

$$P(K | (K \cap \Pi)^c) = \frac{P(K \cap (K \cap \Pi)^c)}{P((K \cap \Pi)^c)} = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(K \cap \Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.35} \approx 0.38$$

Άσκηση 2

Έχουμε τρία ακατάστατα δωμάτια $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Ένα αντικείμενο βρίσκεται σε ένα από αυτά. Για κάθε $i = 1, 2, 3$, p_i είναι η πιθανότητα το αντικείμενο να είναι στο Δ_i και q_i είναι η πιθανότητα, αν το αντικείμενο βρίσκεται στο Δ_i και ψάξουμε εκεί, να το βρούμε. Ψάχνουμε και στα τρία δωμάτια. Ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε το αντικείμενο;

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$\Delta_i = \{\text{το αντικείμενο βρίσκεται στο } \Delta_i \text{ δωμάτιο}\}$$
$$E = \{\text{το αντικείμενο βρέθηκε}\}$$

για $i = 1, 2, 3$. Άρα ξέρω ότι

$$P(\Delta_i) = p_i \text{ και } P(E | \Delta_i) = q_i \text{ για } i = 1, 2, 3.$$

Ψάχνω την πιθανότητα $P(E)$. Εφαρμόζοντας τον τύπο ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap \Delta_1) + P(E \cap \Delta_2) + P(E \cap \Delta_3) \\ &= P(\Delta_1) \cdot P(E | \Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(E | \Delta_2) + P(\Delta_3) \cdot P(E | \Delta_3) \\ &= p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ο Αλέξανδρος γνωρίζει τρεις κοπέλες, τη Μαρία, την Ελένη και τη Γεωργία. Επιλέγει μία από αυτές στην τύχη, της κάνει ερωτική εξομολόγηση αλλά εκείνη τον απορρίπτει. Εάν γνωρίζουμε ότι οι πιθανότητες να ανταποκριθούν οι κοπέλες θετικά είναι 90% για τη Μαρία, 50% για τη Γεωργία και 5% για την Ελένη, ποια η πιθανότητα ο Αλέξανδρος να επέλεξε τη Μαρία, δεδομένου ότι έχει απορριφθεί;

Λύση

Έστω M , E και Γ τα ενδεχόμενα ο Αλέξανδρος να επέλεξε αντίστοιχα τη Μαρία, την Ελένη και τη Γεωργία.

Έστω ακόμα το ενδεχόμενο X ο Αλέξανδρος να απορριφθεί.

Εφόσον ο Αλέξανδρος διαλέγει μια από τις κοπέλες στην τύχη εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$P(M)=P(E)=P(\Gamma)=\frac{1}{3}$$

Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ακόμα ότι: $P(X|M)=0.1$, $P(X|\Gamma)=0.5$, $P(X|E)=0.95$.

Επομένως, παρατηρώντας ότι τα M, E και Γ αποτελούν διαμέριση και χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(M|X) &= \frac{P(M)P(X|M)}{P(M)P(X|M) + P(\Gamma)P(X|\Gamma) + P(E)P(X|E)} \\ &= \frac{0.1 \times 1/3}{0.1 \times 1/3 + 0.5 \times 1/3 + 0.95 \times 1/3} \\ &= 0.0645 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Η Αλίκη και ο Βασίλης θέλουν να αγοράσουν από ένα ποδήλατο. Το κατάστημα διαθέτει 4 πράσινα, 3 κίτρινα και 2 κόκκινα ποδήλατα. Η Αλίκη επιλέγει τυχαία ένα ποδήλατο και το αγοράζει. Αμέσως μετά το ίδιο κάνει και ο Βασίλης. Έστω A το γεγονός ότι η Αλίκη αγόρασε ένα πράσινο ποδήλατο και B το γεγονός ότι ο Βασίλης αγόρασε ένα πράσινο ποδήλατο.

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B/A)$ και $P(B)$.

(β) Είναι τα γεγονότα A και B ανεξάρτητα; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένας από τους δύο αγόρασε πράσινο ποδήλατο;

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Αλίκη και ο Βασίλης αγόρασαν ποδήλατα με διαφορετικό χρώμα;

Λύση

(α) $P(A) = \frac{4}{9}$ (Υπάρχουν 4 πράσινα ποδήλατα στα 9 συνολικά.)

$P(B/A) = \frac{3}{8}$ (Αφού γνωρίζουμε ότι η Αλίκη έχει πράσινο ποδήλατο, ο Βασίλης επέλεξε κάποιο από τα 3 επαναπομείναντα πράσινα από τα 8 συνολικά).

Εφαρμόζοντας τώρα το Θ.Ο.Π., έχουμε ότι:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(A^c) \cdot P(B/A^c) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{4}{9}.$$

(β) $P(B) = \frac{4}{9} \neq \frac{3}{8} = P(B/A)$, δηλαδή τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

(γ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(B/A)P(A) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{13}{18} = 0.722$

(δ) Ας υπολογίσουμε πρώτα την πιθανότητα του γεγονότος να αγοράσουν ποδήλατα ίδιου χρώματος:

$$P(\text{πράσινο, πράσινο}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$$

$$P(\text{κίτρινο, κίτρινο}) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}$$

$$P(\text{κόκκινο, κόκκινο}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}$$

Συνεπώς, $P(\text{αγόρασαν ποδήλατα με διαφορετικό χρώμα}) = 1 - (\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}) = \frac{13}{18} = 0.722$

Άσκηση 5

Μια φυλή Βεδουίνων ψάχνει να βρει νερό στην έρημο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούν το σοφό της φυλής, ο οποίος με την εμπειρία του και το μαγικό ραβδί του μπορεί να εντοπίζει το νερό με πιθανότητα 0.93, δηλαδή αν υπάρχει νερό σε ένα σημείο θα το βρει με πιθανότητα 93%. Επίσης, ο σοφός κάνει λάθος και λέει ότι βρήκε νερό όταν δεν υπάρχει νερό στο 12% των περιπτώσεων. Έστω η εκ των προτέρων (α priori) πιθανότητα ύπαρξης νερού σε οποιοδήποτε σημείο στην έρημο είναι 0.05.

α) Αν κάποια στιγμή ο σοφός φωνάζει «βρήκα νερό», ποιά η πιθανότητα πραγματικά να υπάρχει νερο;

β) Αν φωνάζει «δεν υπάρχει νερό εδώ», ποιά η πιθανότητα πραγματικά να μην υπάρχει νερό;

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο υπάρχει νερό και N το ενδεχόμενο ο σοφός να πει ότι βρήκε νερό. Ισχύουν:

$$P(N|A) = 0.93, P(N|A^c) = 0.12, P(A) = 0.05$$

$$P(N) = P(A)P(N|A) + P(A^c)P(N|A^c) = 0.05 \cdot 0.93 + 0.95 \cdot 0.12 = 0.1605$$

$$P(A|N) = \frac{P(A)P(N|A)}{P(N)} = \frac{0.05 \cdot 0.93}{0.1605} = 0.2897,$$

$$P(A^c|N^c) = \frac{P(A^c)P(N^c|A^c)}{P(N^c)} = \frac{(1-P(A))(1-P(N|A^c))}{(1-P(N))} = \frac{(1-0.05)(1-0.12)}{(1-0.1605)} = 0.996$$

Άσκηση 6

Ένα κουτί περιέχει 3 κάρτες: μια μπλε και από τις δύο πλευρές, μια κίτρινη και από τις δύο πλευρές και μια που είναι από τη μια πλευρά μπλε και από την άλλη πλευρά κίτρινη. Επιλέγουμε τυχαία μια κάρτα και βλέπουμε ότι η μια της πλευρά είναι κίτρινη. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και η άλλη πλευρά κίτρινη;

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$M = \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι μπλε και από τις δυο πλευρές}\}$$

$$K = \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι κίτρινη και από τις δυο πλευρές}\}$$

$$H = \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι από τη μια πλευρά μπλε και από την άλλη πλευρά κίτρινη}\}$$

$$A = \{\text{η επιλεγμένη πλευρά είναι κίτρινη}\}$$

Ψάχνω την πιθανότητα $P(K | A)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned} P(K | A) &= \frac{P(A | K) \cdot P(K)}{P(A | M) \cdot P(M) + P(A | K) \cdot P(K) + P(A | H) \cdot P(H)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Έστω ότι έχουμε δύο ανεξάρτητους ρίψεις ενός ζαριού. Έστω A το γεγονός ότι το πρώτο ζάρι δείχνει αριθμό μεγαλύτερο από 4 και B το γεγονός ότι το δεύτερο ζάρι δείχνει ζυγό αριθμό. Υπολογίστε τις πιθανότητες:

α) $P(A)$

β) $P(B)$

γ) $P(A \cap B)$

δ) $P(A \cup B)$

ε) Είναι τα γεγονότα A και B ανεξάρτητα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες, θα αρχίσουμε με τα γεγονότα A και B .

1. Υπολογισμός $P(A)$:

Το γεγονός A συμβαίνει όταν το πρώτο ζάρι δείχνει 5 ή 6. Άρα, οι πιθανότητες είναι:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2. Υπολογισμός $P(B)$:

Το γεγονός B συμβαίνει όταν το δεύτερο ζάρι δείχνει 2, 4 ή 6. Άρα, οι πιθανότητες είναι:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

3. Υπολογισμός $P(A \cap B)$:

Δεδομένου ότι τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα, ισχύει ότι:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

4. Υπολογισμός $P(A \cup B)$:

Από τον τύπο του νόμου των πιθανοτήτων, έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}.$$

Κάνοντας την κοινή βάση:

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

5. Εξέταση ανεξαρτησίας:

Για να ελέγξουμε αν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα, πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Άρα, τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα, καθώς ισχύει η παραπάνω σχέση.