

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 2

26 Οκτωβρίου 2025

Άσκηση 1

Τρεις εργάτες, οι Α, Β, Γ εργάζονται σε μια βιοτεχνία. Από ένα συγκεκριμένο είδος συσκευών ο Α κατασκευάζει το 50%, ο Β το 30%, ο Γ το 20%. Από αυτές τις συσκευές που κατασκευάζει ο Α, το 2% βγαίνουν ελαττωματικές. Τα αντίστοιχα ποσοστά για τους Β και Γ είναι 3% και 5%. Αγοράζουμε μια συσκευή και είναι ελαττωματική. Βρείτε την πιθανότητα να την έχει κατασκευάσει ο Α.

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$A = \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Α}\}$$

$$B = \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Β}\}$$

$$Γ = \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Γ}\}$$

$$E = \{\text{μια συσκευή είναι ελαττωματική}\}$$

Άρα ξέρουμε ότι

$$P(A) = 0.5, P(B) = 0.3, P(Γ) = 0.2, P(E|A) = 0.02, P(E|B) = 0.03, \text{ και } P(E|Γ) = 0.05.$$

Εμείς ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A|E)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα Bayes και το ΘΟΠ, έχουμε

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{P(E|A)P(A)}{P(A|E)P(A) + P(B|E)P(B) + P(Γ|E)P(Γ)} = \frac{0.02 \cdot 0.5}{0.02 \cdot 0.5 + 0.03 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.2} \approx 0.34$$

Άσκηση 2

Μια φυλή Βεδουίνων ψάχνει να βρει νερό στην έρημο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούν το σοφό της φυλής, ο οποίος με την εμπειρία του και το μαγικό ραβδί του μπορεί να εντοπίζει το νερό με πιθανότητα 0.93, δηλαδή αν υπάρχει νερό σε ένα σημείο θα το βρει με πιθανότητα 93%. Επίσης, ο σοφός κάνει λάθος και λέει ότι βρήκε νερό όταν δεν υπάρχει νερό στο 12% των περιπτώσεων. Έστω η εκ των προτέρων (a priori) πιθανότητα ύπαρξης νερού σε οποιοδήποτε σημείο στην έρημο είναι 0.05.

1. Αν κάποια στιγμή ο σοφός φωνάζει «βρήκα νερό», ποια η πιθανότητα πραγματικά να υπάρχει νερό;
2. Αν φωνάζει «δεν υπάρχει νερό εδώ», ποια η πιθανότητα πραγματικά να μην υπάρχει νερό;

Λύση

Έστω Ν το ενδεχόμενο υπάρχει νερό και Σ το ενδεχόμενο ο σοφός να πει ότι βρήκε νερό. Ισχύουν:

$$P(\Sigma|N) = 0.93, P(\Sigma|N^c) = 0.12, P(N) = 0.05$$

$$P(\Sigma) = P(\Sigma|N)P(N) + P(\Sigma|N^c)P(N^c) = 0.93 \cdot 0.05 + 0.12 \cdot 0.95 = 0.1605$$

$$1. P(N|\Sigma) = \frac{P(\Sigma|N)P(N)}{P(\Sigma)} = \frac{0.93 \cdot 0.05}{0.1605} = 0.2897$$

$$2. P(N^c|\Sigma^c) = \frac{P(\Sigma^c|N^c)P(N^c)}{P(\Sigma^c)} = \frac{(1-P(\Sigma|N^c))P(N^c)}{1-P(\Sigma)} = \frac{(1-0.12) \cdot 0.95}{1-0.1605} = 0.996$$

Άσκηση 3

1. Από τους ασθενείς που νοσηλεύονται σε μια κλινική, το 60% έχει καρδιακή ανεπάρκεια, το 50% έχει πνευμονική ανεπάρκεια και το 35% έχει και τα δύο. Βρείτε τις πιθανότητες:

- (α) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
(β) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν δεν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
(γ) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν είναι γνωστό ότι δεν έχει και τα δύο προβλήματα.

Λύση

1. Έστω τα ενδεχόμενα:

$$K = \{\text{Ένας ασθενής έχει καρδιακή ανεπάρκεια}\}$$
$$\Pi = \{\text{Ένας ασθενής έχει πνευμονική ανεπάρκεια}\}$$

Τότε, ξέρουμε ότι:

$$P(K) = \frac{60}{100} = 0.6, \quad P(\Pi) = \frac{50}{100} = 0.5, \quad P(K \cap \Pi) = \frac{35}{100} = 0.35$$

- (α) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(K|\Pi)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(K|\Pi) = \frac{P(K \cap \Pi)}{P(\Pi)} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7$$

- (β) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(K|\Pi^c)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(K|\Pi^c) = \frac{P(K \cap \Pi^c)}{P(\Pi^c)}$$

Για 2 ενδεχόμενα K, Π ξέρουμε ότι ισχύει:

$$K \cap \Pi^c = K - \Pi$$

και

$$P(K - \Pi) = P(K) - P(K \cap \Pi)$$

Άρα, έχουμε:

$$P(K|\Pi^c) = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(\Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.5} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

- (γ) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(K|(K \cap \Pi)^c)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(K|(K \cap \Pi)^c) = \frac{P(K \cap (K \cap \Pi)^c)}{P((K \cap \Pi)^c)} = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(K \cap \Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.35} = \frac{0.25}{0.65} \approx 0.38$$

Άσκηση 4

- (α) Ένα κουτί περιέχει 15 κόκκινες και 5 άσπρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπάλες, χωρίς επανάθεση. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:
- (α) Και οι 2 επιλεγμένες μπάλες είναι άσπρες.
(β) Η 1η επιλεγμένη μπάλα είναι κόκκινη και η 2η επιλεγμένη μπάλα είναι άσπρη.
- (β) Ένα στα 1000 άτομα ενός πληθυσμού πάσχει από μία ασθένεια. Η εξέταση που πραγματοποιείται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει λάθος διάγνωση στο 1% των περιπτώσεων, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση πάσχει όντως από την ασθένεια, και στο 2%, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση δεν πάσχει από την ασθένεια.

- (α) Να βρεθεί η πιθανότητα θετικού αποτελέσματος εξέτασης σε κάποιο άτομο του πληθυσμού.
 (β) Αν για κάποιο άτομο του πληθυσμού η εξέταση ήταν θετική, να υπολογιστεί η πιθανότητα αυτό να πάσχει πράγματι από την ασθένεια.

Λύση

- (α') (α) Έστω $P(A_1)$ η πιθανότητα η 1η μπάλα να είναι άσπρη. Τότε, θα ισχύει ότι:

$$P(A_1) = \frac{5}{20}$$

Δεδομένου ότι η 1η μπάλα είναι άσπρη, πλέον θα υπάρχουν 19 μπάλες στο κουτί, από τις οποίες μόνο οι 4 θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι και η 2η μπάλα που επιλέγεται είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2|A_1) = \frac{4}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον Πολλαπλασιαστικό Νόμο, η πιθανότητα ότι και οι 2 μπάλες που επιλέγονται τυχαία είναι άσπρες θα είναι ίση με:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

- (β) Έστω $P(K_1)$ η πιθανότητα η 1η μπάλα να είναι κόκκινη. Τότε, θα ισχύει ότι:

$$P(K_1) = \frac{15}{20}$$

Δεδομένου ότι η 1η μπάλα είναι κόκκινη, πλέον θα υπάρχουν 19 μπάλες στο κουτί, από τις οποίες οι 5 θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι η 2η μπάλα που επιλέγεται τυχαία είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2|K_1) = \frac{5}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον Πολλαπλασιαστικό Νόμο, η πιθανότητα ότι η 1η μπάλα είναι κόκκινη και η 2η άσπρη θα είναι ίση με:

$$P(K_1 \cap A_2) = P(A_2|K_1) \cdot P(K_1) = \frac{5}{19} \cdot \frac{15}{20} = \frac{15}{76}$$

- (β') Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

A : {Το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι αρνητικό}

Θ : {Το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό}

B : {Ένα τυχαίο άτομο του πληθυσμού πάσχει από την ασθένεια}

Τότε, ξέρουμε ότι:

$$P(B) = \frac{1}{1000} = 0.001, \quad P(B^c) = \frac{999}{1000} = 0.999$$

$$P(A|B) = 0.01, \quad P(\Theta|B) = 0.99$$

$$P(A|B^c) = 0.98, \quad P(\Theta|B^c) = 0.02$$

- (α) Σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, η πιθανότητα το αποτέλεσμα της εξέτασης να προκύψει θετικό θα είναι:

$$P(\Theta) = P(\Theta|B) \cdot P(B) + P(\Theta|B^c) \cdot P(B^c) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999 = 0.02097$$

- (β) Σύμφωνα με τον Κανόνα του Bayes, αν το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό, η πιθανότητα να πάσχει πράγματι το άτομο από την ασθένεια θα είναι:

$$P(B|\Theta) = \frac{P(\Theta|B) \cdot P(B)}{P(\Theta|B) \cdot P(B) + P(\Theta|B^c) \cdot P(B^c)} = \frac{P(\Theta|B) \cdot P(B)}{P(\Theta)} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.02097} \approx 0.047$$