

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1

Άσκηση 1

Αν A, B, C είναι τρία ενδεχόμενα, γράψτε τα σύνολα που περιγράφουν τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- α) Συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα A, B, C .
- β) Συμβαίνει το πολύ ένα από τα A, B, C .
- γ) Συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A, B, C .
- δ) Συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα A, B, C .
- ε) Συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C .
- στ) Συμβαίνει ακριβώς δύο από τα A, B, C .
- ζ) Μόνο το A συμβαίνει.

Λύση

- α) Θα συμβεί μόνο το A ή μόνο το B ή μόνο το C ή και τα τρία μαζί:
 $A \cup B \cup C$
- β) Θα συμβεί μόνο το A , ή μόνο το B , ή μόνο το C , ή κανένα από τα A, B, C :
 $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$
- γ) Θα συμβεί μόνο το A , ή μόνο το B , ή μόνο το C :
 $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
- δ) Δύο ή και τα τρία γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα:
 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- ε) Θέλουμε να συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C , δηλαδή να μη συμβαίνουν και τα 3 ενδεχόμενα μαζί:
 $(A \cap B \cap C)^c$.
- στ) Δύο από τα γεγονότα συμβαίνουν, αλλά όχι και τα τρία.
 $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$
- ζ) Θα συμβεί μόνο το A , και όχι το B , ούτε το C :
 $A \cap B^c \cap C^c$

Άσκηση 2

Ένα παιχνίδι περιλαμβάνει ένα ζάρι με 6 πλευρές και ένα κέρμα. Ο παίκτης ρίχνει το ζάρι και ρίχνει το κέρμα.

- α) Περιγράψτε τον δειγματοχώρο Ω .
- β) Έστω A το γεγονός ότι το ζάρι φέρνει περιττό αριθμό. Περιγράψτε το γεγονός A και βρείτε την πιθανότητα $P(A)$.
- γ) Έστω B το γεγονός ότι το κέρμα φέρνει κορώνα και το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο από 1. Περιγράψτε το γεγονός B και βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

Λύση

- α) Το πείραμα αποτελείται από δύο στάδια:

1. Την ρίψη ενός ζαριού με 6 πλευρές (1, 2, 3, 4, 5, 6).
2. Την ρίψη ενός κέρματος (Κ ή Γ)

Για να βρούμε τον δειγματοχώρο θα συνδυάσουμε τα αποτελέσματα του ζαριού με τα αποτελέσματα του κέρματος.

Ο παίκτης μπορεί να φέρει έναν από τους αριθμούς του ζαριού (1, 2, 3, 4, 5, 6) και το κέρμα θα φέρει είτε Κορώνα (Κ) είτε Γράμματα (Γ).

Επομένως τα δυνατά αποτελέσματα είναι τα εξής ζεύγη:

Αν το κέρμα δείξει Κορώνα: 1Κ, 2Κ, 3Κ, 4Κ, 5Κ, 6Κ

Αν το κέρμα δείξει Γράμματα: 1Γ, 2Γ, 3Γ, 4Γ, 5Γ, 6Γ

Άρα ο δειγματοχώρος Ω είναι το σύνολο όλων αυτών των πιθανών αποτελεσμάτων:

$$\Omega = \{ 1Κ, 2Κ, 3Κ, 4Κ, 5Κ, 6Κ, 1Γ, 2Γ, 3Γ, 4Γ, 5Γ, 6Γ \}$$

- β) Οι περιττοί αριθμοί στις πλευρές ενός ζαριού είναι οι 1, 3, 5.

Άρα το γεγονός A είναι το $\{ 1Κ, 1Γ, 3Κ, 3Γ, 5Κ, 5Γ \}$.

Για να βρούμε την πιθανότητα του γεγονότος A υπολογίζουμε τον πληθάνημο του A προς τον πληθάνημο του δειγματοχώρου Ω .

$$\text{Άρα: } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

- γ) Τα στοιχεία του γεγονότος B είναι $\{ 2Κ, 3Κ, 4Κ, 5Κ, 6Κ \}$.

$$\text{Άρα: } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5}{12}$$

Άσκηση 3

Ένα μικροβιολογικό εργαστήριο θέλει να κάνει μια μελέτη σε δύο μικροοργανισμούς που προκαλούν μια ασθένεια, τον Α και τον Β. Βλέποντας τα δείγματα των ασθενών, παρατηρούμε ότι το 60 % από αυτούς δεν έχουν μολυνθεί ούτε από τον Α αλλά ούτε και από τον Β, το 20% έχει μολυνθεί από τον Α και το 30% από τον Β. Έστω ότι ο γιατρός επιλέγει τυχαία τον φάκελο ενός ασθενή.

- α) Ποια η πιθανότητα ο ασθενής να έχει μολυνθεί από τον μικροοργανισμό Α ή από τον μικροοργανισμό Β;
- β) Ποια η πιθανότητα ο ασθενής να έχει μολυνθεί από τον μικροοργανισμό Α και από τον μικροοργανισμό Β;

Λύση

$$X = \{ \text{Ένας ασθενής έχει μολυνθεί από τον Α} \}$$

$$Y = \{ \text{Ένας ασθενής έχει μολυνθεί από τον Β} \}$$

$$\text{Το 60 \% από αυτούς δεν έχουν μολυνθεί ούτε από τον Α αλλά ούτε και από τον Β} \Rightarrow P(X^c \cap Y^c) = 0.6$$

$$\text{Το 20\% έχει μολυνθεί από τον Α} \Rightarrow P(X) = 0.2$$

$$\text{Το 30\% έχει μολυνθεί από τον Β} \Rightarrow P(Y) = 0.3$$

- α) Η πιθανότητα που μας ζητείται να υπολογίσουμε είναι η $P(X \cup Y)$, άρα

$$P(X \cup Y) = 1 - P((X \cup Y)^c) = 1 - P(X^c \cap Y^c) = 1 - 0.6 = 0.4$$

- β) Η πιθανότητα που μας ζητείται να υπολογίσουμε είναι η $P(X \cap Y)$.

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Άρα από την εξίσωση του (α) προκύπτει ότι :

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \Leftrightarrow 0.4 = 0.2 + 0.3 - P(X \cap Y) \Leftrightarrow P(X \cap Y) = 0.1$$

Άσκηση 4

Ο εκφωνητής του δελτίου καιρού δίνει τις ακόλουθες πιθανότητες για τον καιρό τις επόμενες δύο μέρες:

- α) βροχή σήμερα: 0.3
- β) βροχή αύριο: 0.5
- γ) βροχή και σήμερα και αύριο: 0.2
- δ) βροχή σήμερα ή αύριο: 0.7

Είναι αυτό το δελτίο καιρού συμβατό με τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων;

Λύση

$$P(A) = P(\{ \text{Σήμερα θα βρέξει.} \}) = 0.3$$

$$P(B) = P(\{ \text{Αύριο θα βρέξει.} \}) = 0.5$$

$$P(A \cap B) = P(\{ \text{Σήμερα και αύριο θα βρέξει.} \}) = 0.2$$

$$P(A \cup B) = P(\{ \text{Σήμερα ή αύριο θα βρέξει.} \}) = 0.7$$

Από τις ιδιότητες των Πιθανοτήτων έχουμε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6$$

Πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την πιθανότητα 0.7 που έχει δωθεί από τον εκφωνητή για το γεγονός $A \cup B$.

Άσκηση 5

Ένα νοσοκομείο κωδικοποιεί τους ασθενείς του ανάλογα με το αν έχουν ή όχι υγειονομική ασφάλεια (1 αν είναι ασφαλισμένοι, 0 διαφορετικά), και επίσης ανάλογα με την κρίσιμότητα της κατάστασής τους: καλή (g), ικανοποιητική (f), σοβαρή (s). Θεωρείστε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός ασθενούς.

- (α) Δώστε μία περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω .
- (β) Έστω A το γεγονός ότι η κατάσταση της υγείας ενός ασθενούς είναι σοβαρή. Ποια είναι τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο A ;
- (γ) Έστω B το γεγονός ότι ο ασθενής είναι ανασφάλιστος. Ποια είναι τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο B ;
- (δ) Δώστε όλα τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο γεγονός $B^c \cup A$.

Λύση

- (α) Ο δειγματικός χώρος Ω περιλαμβάνει όλα τα διατεταγμένα ζεύγη με πρώτο στοιχείο την ασφάλιση και δεύτερο την κρίσιμότητα της κατάστασης:
 - Η πρώτη διάσταση αφορά την ασφάλιση:
 - 1: Ασφαλισμένος
 - 0: Ανασφάλιστος
 - Η δεύτερη διάσταση αφορά την κατάσταση υγείας:
 - g : Καλή
 - f : Ικανοποιητική
 - s : Σοβαρή

Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι:

$$S = \{(1, g), (0, g), (1, f), (0, f), (1, s), (0, s)\}$$

- (β) Το γεγονός A περιλαμβάνει όλα τα ενδεχόμενα όπου η κατάσταση υγείας είναι σοβαρή. Από τον δειγματικό χώρο, τα ενδεχόμενα που πληρούν αυτή την προϋπόθεση είναι:

$$A = \{(1, s), (0, s)\}$$

Δηλαδή, έχουμε έναν ασφαλισμένο ασθενή με σοβαρή κατάσταση $(1, s)$ και έναν ανασφάλιστο ασθενή με σοβαρή κατάσταση $(0, s)$.

- (γ) Το γεγονός B περιλαμβάνει όλα τα ενδεχόμενα όπου ο ασθενής είναι ανασφάλιστος (0). Έτσι, από τον δειγματικό χώρο, έχουμε:

$$B = \{(0, g), (0, f), (0, s)\}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο ανασφάλιστος ασθενής μπορεί να έχει οποιαδήποτε από τις τρεις καταστάσεις υγείας.

- (δ) Για να βρούμε το B^c , θα πρέπει να εντοπίσουμε όλα τα ενδεχόμενα που δεν περιλαμβάνονται στο B .

$$B^c = \{(1, g), (1, f), (1, s)\}$$

Για το $B^c \cup A$, περιλαμβάνουμε τα απλά ενδεχόμενα του B^c καθώς και αυτά του A :

$$B^c \cup A = \{(1, g), (1, f), (1, s), (0, s)\}$$

Άρα, τα ενδεχόμενα που περιέχονται στο $B^c \cup A$ είναι οι ασφαλισμένοι σε όλες τις καταστάσεις, καθώς και ο ανασφάλιστος με σοβαρή κατάσταση.

Άσκηση 6

Σε μια έρευνα συγκεντρώθηκαν στοιχεία για 1000 άτομα. Βρέθηκε ότι από αυτά:

- α) 832 ήταν άνδρες
- β) 521 ήταν παντρεμένοι
- γ) 350 ήταν παντρεμένοι άνδρες

Είναι δυνατόν αυτά τα στοιχεία να είναι σωστά;

Λύση

Έστω τα γεγονότα $A = \{\text{Το άτομο είναι άνδρας}\}$ και $B = \{\text{Το άτομο είναι παντρεμένο}\}$

Σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία έχουμε:

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{832}{1000} \\P(B) &= \frac{521}{1000} \\P(A \cap B) &= \frac{350}{1000}.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{832}{1000} + \frac{521}{1000} - \frac{350}{1000} = \frac{1003}{1000} = 1.003 > 1,$$

Αδύνατο. Επομένως δεν είναι δυνατόν τα παραπάνω στοιχεία να είναι σωστά.

Άσκηση 7

Έστω A και B τα ενδεχόμενα ένας εργαζόμενος στις 7 : 30 π.μ να βρίσκεται στη στάση για να μεταβεί στη δουλειά του και περιμένει να περάσει λεωφορείο ή ταξί, αντίστοιχα. Αν $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.30$, οι πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων, να υπολογισθεί η πιθανότητα στις 7 : 30 π.μ να μην περάσει ούτε ταξί, ούτε λεωφορείο από τη στάση.

Λύση

Ζητείται να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $A^c \cap B^c$. Παρατηρούμε ότι: $A \cap B = \emptyset$
Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\&= 1 - P(A \cup B) \\&= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\&= 1 - (0.45 + 0.30) \\&= 1 - 0.75 \\&= 0.25\end{aligned}$$

Άσκηση 8

Ένα τυχαίο πείραμα έχει δειγματοχώρο $\Omega = \{A, B, C\}$. Γνωρίζουμε ότι τα απλά γεγονότα A, B, C είναι ξένα μεταξύ τους και ότι:

$$1. P(A \cup C) = \frac{9}{16}$$

$$2. P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(C)$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι τα απλά γεγονότα είναι ξένα μεταξύ τους, συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αξίωμα της προσθετικότητας:

$$P(\{A \cup C\}) = P(A) + P(C) = \frac{9}{16} \quad (1)$$

$$P(\{A \cup B\}) = P(A) + P(B) = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Τέλος, χρησιμοποιούμε και το αξίωμα της κανονικοποίησης:

$$P(\Omega) = P(A) + P(B) + P(C) = 1 \quad (3)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ένα απλό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Λύνουμε ως προς $P(B)$ την δεύτερη εξίσωση:

$$P(B) = \frac{3}{4} - P(A). \quad (4)$$

Λύνουμε ως προς $P(C)$ την πρώτη εξίσωση:

$$P(C) = \frac{9}{16} - P(A). \quad (5)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (4),(5) στην (3):

$$P(A) + \left(\frac{3}{4} - P(A)\right) + \left(\frac{9}{16} - P(A)\right) = 1.$$

Λύνουμε ως προς $P(A)$:

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{16} - P(A) = 1,$$

$$\frac{21}{16} - P(A) = 1,$$

$$P(A) = \frac{21}{16} - 1,$$

$$P(A) = \frac{5}{16}.$$

Αφού βρήκαμε ότι $P(A) = \frac{5}{16}$, το αντικαθιστούμε στις σχέσεις (4),(5) για να βρούμε και τα $P(A), P(B)$:

$$P(B) = \frac{3}{4} - \frac{5}{16} = \frac{7}{16},$$

$$P(C) = \frac{9}{16} - \frac{5}{16} = \frac{1}{4}.$$

Συνεπώς:

$$P(A) = \frac{5}{16}, \quad P(B) = \frac{7}{16}, \quad P(C) = \frac{1}{4}.$$

Άσκηση 9

Από τους ασθενείς που νοσηλεύονται σε μια κλινική, το 60% έχει καρδιακή ανεπάρκεια, το 50% έχει πνευμονική ανεπάρκεια και το 35% έχει και τα δύο. Βρείτε τις πιθανότητες:

1. Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
2. Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν δεν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
3. Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν είναι γνωστό ότι δεν έχει και τα δύο προβλήματα.

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$X = \{\text{Ένας ασθενής έχει καρδιακή ανεπάρκεια}\}$$

$$Y = \{\text{Ένας ασθενής έχει πνευμονική ανεπάρκεια}\}$$

Τότε, ξέρουμε ότι:

$$P(X) = 60\% = 0.6, \quad P(Y) = 50\% = 0.5 \quad \text{και} \quad P(X \cap Y) = 35\% = 0.35$$

α) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(X|Y)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7$$

β) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(X|Y^c)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(X|Y^c) = \frac{P(X \cap Y^c)}{P(Y^c)}$$

- $P(X \cap Y^c) = P(X - Y) = P(X) - P(X \cap Y) = 0.6 - 0.35 = 0.25$
- $P(Y^c) = 1 - P(Y) = 1 - 0.5 = 0.5$

Έτσι:

$$P(X|Y^c) = \frac{P(X) - P(X \cap Y)}{P(Y^c)} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

γ) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(X|(X \cap Y)^c)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(X|(X \cap Y)^c) = \frac{P(X \cap (X \cap Y)^c)}{P((X \cap Y)^c)}$$

- $P(X \cap (X \cap Y)^c) = P(X) - P(X \cap Y) = 0.6 - 0.35 = 0.25$
- $P((X \cap Y)^c) = 1 - P(X \cap Y) = 1 - 0.35 = 0.65$

Έτσι:

$$P(X|(X \cap Y)^c) = \frac{P(X) - P(X \cap Y)}{P((X \cap Y)^c)} = \frac{0.25}{0.65} \approx 0.38$$