

Άσκηση 1

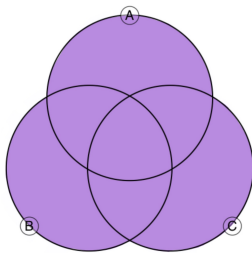
Αν A, B, C είναι τρία ενδεχόμενα, γράψτε τα σύνολα που περιγράφουν τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- α) Συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα A, B, C .
- β) Συμβαίνει το πολύ ένα από τα A, B, C .
- γ) Συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A, B, C .
- δ) Συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα A, B, C .
- ε) Συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C .
- στ) Συμβαίνει ακριβώς δύο από τα A, B, C .
- ζ) Μόνο το A συμβαίνει.

Λύση

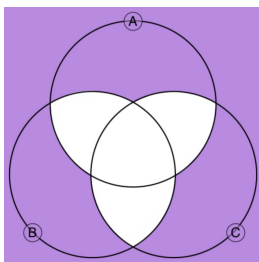
- α) Θα συμβεί μόνο το A ή μόνο το B ή μόνο το C ή και τα τρία μαζί:

$$A \cup B \cup C$$



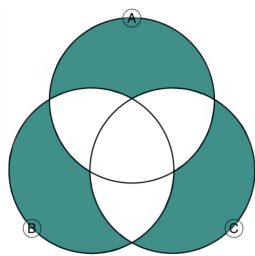
- β) Θα συμβεί μόνο το A , ή μόνο το B , ή μόνο το C , ή κανένα από τα A, B, C :

$$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$$



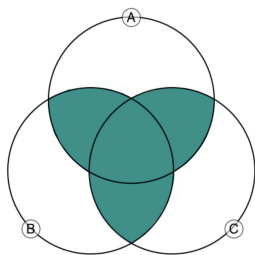
γ) Θα συμβεί μόνο το A , ή μόνο το B , ή μόνο το C :

$$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$



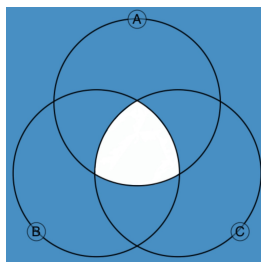
δ) Δύο ή και τα τρία γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$



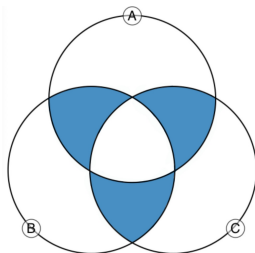
ε) Θέλουμε να συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C , δηλαδή να μη συμβαίνουν και τα 3 ενδεχόμενα μαζί:

$$(A \cap B \cap C)^c.$$



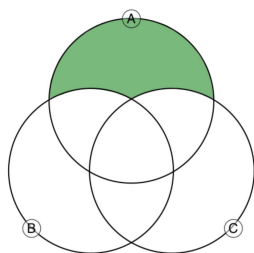
στ) Δύο από τα γεγονότα συμβαίνουν, αλλά όχι και τα τρία.

$$(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$$



ζ) Θα συμβεί μόνο το A , και όχι το B , ούτε το C :

$$A \cap B^c \cap C^c$$



Άσκηση 2

Ένα παιχνίδι περιλαμβάνει ένα ζάρι με 6 πλευρές και ένα κέρμα. Ο παίκτης ρίχνει το ζάρι και ρίχνει το κέρμα.

- Περιγράψτε τον δειγματοχώρο Ω .
- Έστω A το γεγονός ότι το ζάρι φέρνει περιττό αριθμό. Περιγράψτε το γεγονός A και βρείτε την πιθανότητα $P(A)$.
- Έστω B το γεγονός ότι το κέρμα φέρνει κορώνα και το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο από 1. Περιγράψτε το γεγονός B και βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

Λύση

- α) Το πείραμα αποτελείται από δύο στάδια:

- Την ρίψη ενός ζαριού με 6 πλευρές (1, 2, 3, 4, 5, 6).
- Την ρίψη ενός κέρματος (Κ ή Γ)

Για να βρούμε τον δειγματοχώρο θα συνδυάσουμε τα αποτελέσματα του ζαριού με τα αποτελέσματα του κέρματος.

Ο παίκτης μπορεί να φέρει έναν από τους αριθμούς του ζαριού (1, 2, 3, 4, 5, 6) και το κέρμα θα φέρει είτε Κορώνα (Κ) είτε Γράμματα (Γ).

Επομένως τα δυνατά αποτελέσματα είναι τα εξής ζεύγη:

Αν το κέρμα δείξει Κορώνα: 1Κ, 2Κ, 3Κ, 4Κ, 5Κ, 6Κ

Αν το κέρμα δείξει Γράμματα: 1Γ, 2Γ, 3Γ, 4Γ, 5Γ, 6Γ

Άρα ο δειγματοχώρος Ω είναι το σύνολο όλων αυτών των πιθανών αποτελεσμάτων:

$$\Omega = \{ 1Κ, 2Κ, 3Κ, 4Κ, 5Κ, 6Κ, 1Γ, 2Γ, 3Γ, 4Γ, 5Γ, 6Γ \}$$

- β) Οι περιττοί αριθμοί στις πλευρές ενός ζαριού είναι οι 1, 3, 5.

Άρα το γεγονός A είναι το $\{ 1Κ, 1Γ, 3Κ, 3Γ, 5Κ, 5Γ \}$.

Για να βρούμε την πιθανότητα του γεγονότος A υπολογίζουμε τον πληθάρημο του A προς τον πληθάρημο του δειγματοχώρου Ω .

$$\text{Άρα: } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

- γ) Τα στοιχεία του γεγονότος B είναι $\{ 2Κ, 3Κ, 4Κ, 5Κ, 6Κ \}$.

$$\text{Άρα: } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5}{12}$$

Άσκηση 3

Ένα μικροβιολογικό εργαστήριο θέλει να κάνει μια μελέτη σε δύο μικροοργανισμούς που προκαλούν μια ασθένεια, τον Α και τον Β. Βλέποντας τα δείγματα των ασθενών, παρατηρούμε ότι το 60 % από αυτούς δεν έχουν μολυνθεί ούτε από τον Α αλλά ούτε και από τον Β, το 20% έχει μολυνθεί από τον Α και το 30% από τον Β. Έστω ότι ο γιατρός επιλέγει τυχαία τον φάκελο ενός ασθενή.

- α) Ποια η πιθανότητα ο ασθενής να έχει μολυνθεί από τον μικροοργανισμό Α ή από τον μικροοργανισμό Β;
- β) Ποια η πιθανότητα ο ασθενής να έχει μολυνθεί από τον μικροοργανισμό Α και από τον μικροοργανισμό Β;

Λύση

$X = \{ \text{Ένας ασθενής έχει μολυνθεί από τον Α} \}$

$Y = \{ \text{Ένας ασθενής έχει μολυνθεί από τον Β} \}$

Το 60 % από αυτούς δεν έχουν μολυνθεί ούτε από τον Α αλλά ούτε και από τον Β $\Rightarrow P(X^c \cap Y^c) = 0.6$

Το 20% έχει μολυνθεί από τον Α $\Rightarrow P(X) = 0.2$

Το 30% έχει μολυνθεί από τον Β $\Rightarrow P(Y) = 0.3$

- α) Η πιθανότητα που μας ζητείται να υπολογίσουμε είναι η $P(X \cup Y)$, άρα

$$P(X \cup Y) = 1 - P((X \cup Y)^c) = 1 - P(X^c \cap Y^c) = 1 - 0.6 = 0.4$$

- β) Η πιθανότητα που μας ζητείται να υπολογίσουμε είναι η $P(X \cap Y)$.

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Άρα από την εξίσωση του (α) προκύπτει ότι :

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \Leftrightarrow 0.4 = 0.2 + 0.3 - P(X \cap Y) \Leftrightarrow P(X \cap Y) = 0.1$$

Άσκηση 4

Ένα κουτί περιέχει 3 μπίλιες, 1 κόκκινη, 1 πράσινη και 1 μπλε. Θεωρείστε ένα πείραμα κατά το οποίο παίρνουμε μια μπίλια από το κουτί, την επανατοποθετούμε στο κουτί και τραβάμε μια δεύτερη μπίλια από το κουτί. Περιγράψτε το δειγματικό χώρο του πειράματος. Επαναλάβετε τραβώντας τη δεύτερη μπίλια χωρίς την επανατοποθέτηση της πρώτης.

Λύση

α) Περιγράψτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Όταν τραβάμε την πρώτη μπίλια, υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

1. Να είναι η κόκκινη (r)
2. Να είναι η πράσινη (g)
3. Να είναι η μπλε (b).

Όταν τραβάμε τη δεύτερη μπίλια, υπάρχουν ξανά τρία ενδεχόμενα, καθώς επανατοποθετήσαμε την πρώτη μπίλια.

Άρα:

Αν η πρώτη μπίλια είναι κόκκινη (r), τότε η δεύτερη μπορεί να είναι κόκκινη (r), πράσινη (g), ή μπλε (b).

Αν η πρώτη μπίλια είναι πράσινη (g), τότε η δεύτερη μπορεί να είναι κόκκινη (r), πράσινη (g), ή μπλε (b).

Αν η πρώτη μπίλια είναι μπλε (b), τότε η δεύτερη μπορεί να είναι κόκκινη (r), πράσινη (g), ή μπλε (b).

$$\Omega = \{ (r, r), (r, g), (r, b), (g, r), (g, g), (g, b), (b, r), (b, g), (b, b) \}$$

β) Όταν τραβάμε την πρώτη μπίλια όπως πριν, υπάρχουν τρία ενδεχόμενα: κόκκινη (r), πράσινη (g) ή μπλε (b). Όμως σε αυτή την περίπτωση δεν επανατοποθετούμε την πρώτη μπίλια. Αυτό σημαίνει ότι όταν τραβάμε τη δεύτερη μπίλια, μένουν 2 μπίλιες στο κουτί.

Άρα:

Αν η πρώτη μπίλια είναι κόκκινη (r), τότε οι εναπομείνουσες μπίλιες είναι η πράσινη (g) και η μπλε (b).

Αν η πρώτη μπίλια είναι πράσινη (g), τότε οι εναπομείνουσες μπίλιες είναι η κόκκινη (r) και η μπλε (b).

Αν η πρώτη μπίλια είναι μπλε (b), τότε οι εναπομείνουσες μπίλιες είναι η κόκκινη (r) και η πράσινη (g).

$$\Omega = \{ (r, g), (r, b), (g, r), (g, b), (b, r), (b, g) \}$$

Άσκηση 5

Ένα αρωματοπωλείο γιορτάζει τα δέκα χρόνια λειτουργίας του προσφέροντας δύο από τα ακριβότερα αρώματα του στη μισή τιμή, το άρωμα 1 και το άρωμα 2. Στην προσφορά αυτή ανταποκρίθηκαν 400 πελάτες. Γνωρίζουμε ότι ο κάθε πελάτης αγόρασε τουλάχιστον ένα από τα δύο αρώματα. Έστω ότι 240 πελάτες αγόρασαν το άρωμα 1 και 340 το άρωμα 2.

Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

$$A = \{\text{Ο πελάτης αγόρασε το άρωμα 1}\}$$

$$B = \{\text{Ο πελάτης αγόρασε το άρωμα 2}\}$$

Διαλέγοντας έναν πελάτη στην τύχη:

- Υπολογίστε την πιθανότητα να αγόρασε μόνο το άρωμα 2.
- Υπολογίστε την πιθανότητα να αγόρασε μόνο ένα από τα δύο αρώματα.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι ο κάθε πελάτης αγόρασε τουλάχιστον ένα από τα δύο αρώματα: $P(A \cup B) = 1$

Έστω ότι 240 από τους 400 πελάτες αγόρασαν το άρωμα 1: $P(A) = \frac{240}{400}$

Έστω ότι 340 από τους 400 πελάτες αγόρασαν το άρωμα 2: $P(B) = \frac{340}{400}$

- Ψάχνουμε την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης να αγόρασε μόνο το άρωμα 2, δηλαδή να αγόρασε το άρωμα 2 και όχι το άρωμα 1.

Συνεπώς ψάχνουμε το εξής: $P(B \cap A^c)$.

$$P(B \cap A^c) = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) \quad (1)$$

Μας λείπει το $P(A \cap B)$, το οποίο θα υπολογίσουμε από τα παραπάνω δεδομένα.

$$P(A \cup B) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1 = \frac{240}{400} + \frac{340}{400} - 1 = \frac{180}{400}$$

Επόμενως η σχέση (1):

$$P(B) - P(B \cap A) = \frac{340}{400} - \frac{180}{400} = \frac{2}{5}.$$

Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$.

- Ψάχνουμε την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης να αγόρασε μόνο ένα από τα δύο αρώματα, δηλαδή να αγόρασε το 1 και όχι το 2 ή να αγόρασε το 2 και όχι το 1.

Συνεπώς ψάχνουμε το εξής: $P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = P((A - B) \cup (B - A))$.

Με χρήση ιδιοτήτων:

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) - P((A - B) \cap (B - A)) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) =$$

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$$

$$= \frac{240}{400} + \frac{340}{400} - 2 * \frac{180}{400} = \frac{11}{20}$$

Σημειώστε ότι $P((A - B) \cap (B - A)) = 0$, γιατί πρόκειται για ξένα μεταξύ τους γεγονότα.

Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{11}{20} = 0.55 = 55\%$.

Άσκηση 6

Ένα νοσοκομείο κωδικοποιεί τους ασθενείς του ανάλογα με το αν έχουν ή όχι υγειονομική ασφάλεια (1 αν είναι ασφαλισμένοι, 0 διαφορετικά), και επίσης ανάλογα με την κρίσιμότητα της κατάστασής τους: καλή (g), ικανοποιητική (f), σοβαρή (s). Θεωρείστε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός ασθενούς.

- (α) Δώστε μία περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω .
- (β) Έστω A το γεγονός ότι η κατάσταση της υγείας ενός ασθενούς είναι σοβαρή. Ποια είναι τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο A ;
- (γ) Έστω B το γεγονός ότι ο ασθενής είναι ανασφάλιστος. Ποια είναι τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο B ;
- (δ) Δώστε όλα τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο γεγονός $B^c \cup A$.

Λύση

- (α) Ο δειγματικός χώρος Ω περιλαμβάνει όλα τα διατεταγμένα ζεύγη με πρώτο στοιχείο την ασφάλιση και δεύτερο την κρίσιμότητα της κατάστασης:

- Η πρώτη διάσταση αφορά την ασφάλιση:
 - 1: Ασφαλισμένος
 - 0: Ανασφάλιστος
- Η δεύτερη διάσταση αφορά την κατάσταση υγείας:
 - g : Καλή
 - f : Ικανοποιητική
 - s : Σοβαρή

Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι:

$$S = \{(1, g), (0, g), (1, f), (0, f), (1, s), (0, s)\}$$

- (β) Το γεγονός A περιλαμβάνει όλα τα ενδεχόμενα όπου η κατάσταση υγείας είναι σοβαρή. Από τον δειγματικό χώρο, τα ενδεχόμενα που πληρούν αυτή την προϋπόθεση είναι:

$$A = \{(1, s), (0, s)\}$$

Δηλαδή, έχουμε έναν ασφαλισμένο ασθενή με σοβαρή κατάσταση ($1, s$) και έναν ανασφάλιστο ασθενή με σοβαρή κατάσταση ($0, s$).

- (γ) Το γεγονός B περιλαμβάνει όλα τα ενδεχόμενα όπου ο ασθενής είναι ανασφάλιστος (0). Έτσι, από τον δειγματικό χώρο, έχουμε:

$$B = \{(0, g), (0, f), (0, s)\}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο ανασφάλιστος ασθενής μπορεί να έχει οποιαδήποτε από τις τρεις καταστάσεις υγείας.

- (δ) Για να βρούμε το B^c , θα πρέπει να εντοπίσουμε όλα τα ενδεχόμενα που δεν περιλαμβάνονται στο B .

$$B^c = \{(1, g), (1, f), (1, s)\}$$

Για το $B^c \cup A$, περιλαμβάνουμε τα απλά ενδεχόμενα του B^c καθώς και αυτά του A :

$$B^c \cup A = \{(1, g), (1, f), (1, s), (0, s)\}$$

Άρα, τα ενδεχόμενα που περιέχονται στο $B^c \cup A$ είναι οι ασφαλισμένοι σε όλες τις καταστάσεις, καθώς και ο ανασφάλιστος με σοβαρή κατάσταση.

Άσκηση 7

Ένα τυχαίο πείραμα έχει δειγματοχώρο $\Omega = \{A, B, C\}$. Γνωρίζουμε ότι τα απλά γεγονότα A, B, C είναι ξένα μεταξύ τους και ότι:

1. $P(A \cup C) = \frac{9}{16}$
2. $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(C)$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι τα απλά γεγονότα είναι ξένα μεταξύ τους, συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αξίωμα της προσθετικότητας:

$$P(\{A \cup C\}) = P(A) + P(C) = \frac{9}{16} \quad (1)$$

$$P(\{A \cup B\}) = P(A) + P(B) = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Τέλος, χρησιμοποιούμε και το αξίωμα της κανονικοποίησης:

$$P(\Omega) = P(A) + P(B) + P(C) = 1 \quad (3)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ένα απλό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Λύνουμε ως προς $P(B)$ την δεύτερη εξίσωση:

$$P(B) = \frac{3}{4} - P(A). \quad (4)$$

Λύνουμε ως προς $P(C)$ την πρώτη εξίσωση:

$$P(C) = \frac{9}{16} - P(A). \quad (5)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (4),(5) στην (3):

$$P(A) + \left(\frac{3}{4} - P(A)\right) + \left(\frac{9}{16} - P(A)\right) = 1.$$

Λύνουμε ως προς $P(A)$:

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{16} - P(A) = 1,$$

$$\frac{21}{16} - P(A) = 1,$$

$$P(A) = \frac{21}{16} - 1,$$

$$P(A) = \frac{5}{16}.$$

Αφού βρήκαμε ότι $P(A) = \frac{5}{16}$, το αντικαθιστούμε στις σχέσεις (4),(5) για να βρούμε και τα $P(A), P(B)$:

$$P(B) = \frac{3}{4} - \frac{5}{16} = \frac{7}{16},$$

$$P(C) = \frac{9}{16} - \frac{5}{16} = \frac{1}{4}.$$

Συνεπώς:

$$P(A) = \frac{5}{16}, \quad P(B) = \frac{7}{16}, \quad P(C) = \frac{1}{4}.$$

Άσκηση 8

Από τους ασθενείς που νοσηλεύονται σε μια κλινική, το 60% έχει καρδιακή ανεπάρκεια, το 50% έχει πνευμονική ανεπάρκεια και το 35% έχει και τα δύο. Βρείτε τις πιθανότητες:

1. Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
2. Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν δεν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
3. Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν είναι γνωστό ότι δεν έχει και τα δύο προβλήματα.

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$X = \{\text{Ένας ασθενής έχει καρδιακή ανεπάρκεια}\}$$

$$Y = \{\text{Ένας ασθενής έχει πνευμονική ανεπάρκεια}\}$$

Τότε, ξέρουμε ότι:

$$P(X) = 60\% = 0.6, \quad P(Y) = 50\% = 0.5 \quad \text{και} \quad P(X \cap Y) = 35\% = 0.35$$

α) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(X|Y)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7$$

β) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(X|Y^c)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(X|Y^c) = \frac{P(X \cap Y^c)}{P(Y^c)}$$

- $P(X \cap Y^c) = P(X - Y) = P(X) - P(X \cap Y) = 0.6 - 0.35 = 0.25$
- $P(Y^c) = 1 - P(Y) = 1 - 0.5 = 0.5$

Έτσι:

$$P(X|Y^c) = \frac{P(X) - P(X \cap Y)}{P(Y^c)} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

γ) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(X|(X \cap Y)^c)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(X|(X \cap Y)^c) = \frac{P(X \cap (X \cap Y)^c)}{P((X \cap Y)^c)}$$

- $P(X \cap (X \cap Y)^c) = P(X) - P(X \cap Y) = 0.6 - 0.35 = 0.25$
- $P((X \cap Y)^c) = 1 - P(X \cap Y) = 1 - 0.35 = 0.65$

Έτσι:

$$P(X|(X \cap Y)^c) = \frac{P(X) - P(X \cap Y)}{P((X \cap Y)^c)} = \frac{0.25}{0.65} \approx 0.38$$

Άσκηση 9

Από τους μαθητές σε μία τάξη, 60% είναι διάνοιες, 70% είναι ΑΕΚτζήδες και 25% δεν ανήκουν σε καμία από αυτές τις δύο κατηγορίες. Ποια η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής είναι διάνοια ή ΑΕΚτζής αλλά όχι και τα δύο;

Λύση

Έστω G το γεγονός ότι ο επιλεγμένος μαθητής είναι διάνοια, και C το γεγονός ότι ο επιλεγμένος μαθητής είναι ΑΕΚτζής. Μας δίδεται ότι:

$$P(G) = 0.6, \quad P(C) = 0.7, \quad P(G^c \cap C^c) = 0.25.$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες, θα έχουμε ότι:

$$P(G \cup C) =$$

$$P(G) + P(C) - P(G \cap C) = 1 - P(G^c \cap C^c)$$

$$\Rightarrow 0.6 + 0.7 - P(G \cap C) = 1 - 0.25$$

$$\Rightarrow P(G \cap C) = 0.55.$$

Ψάχνουμε την πιθανότητα της ένωσης δύο ξένων μεταξύ τους γεγονότων $P((G \cap C^c) \cup (C \cap G^c))$

Ισχύει ότι:

$$P(G \cap C^c) = P(G) - P(G \cap C) = 0.6 - 0.55 = 0.05.$$

Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι:

$$P(C \cap G^c) = P(C) - P(C \cap G) = 0.7 - 0.55 = 0.15.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P((G \cap C^c) \cup (C \cap G^c)) &= P(G \cap C^c) + P(C \cap G^c) = \\ &= 0.05 + 0.15 = 0.2. \end{aligned}$$