

Φροντιστήριο 5

Άσκηση 1

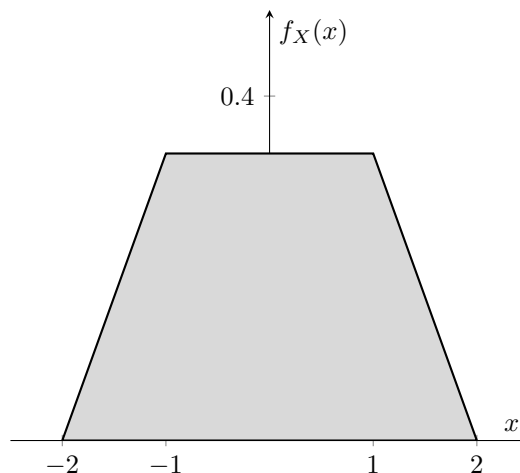
Έστω X συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{1}{3}(x+2) & -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{3} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}(-x+2) & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

- (α) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.
- (β) Να αποδείξετε ότι ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.
- (γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbb{P}(\frac{3}{2} \leq X \leq 2)$.
- (δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbb{P}(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2)$.

Λύση

- (α) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-2, 2]$) που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η σ.π.π. $f_X(x)$

- (β) Η $f_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)dx + \int_{-2}^{-1} f_X(x)dx + \int_{-1}^{1} f_X(x)dx + \int_{1}^{2} f_X(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{-1} f_X(x)dx + \int_{-1}^{1} f_X(x)dx + \int_{1}^{2} f_X(x)dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = \int_{-2}^{-1} f_X(x)dx + \int_{-1}^{1} f_X(x)dx + \int_{1}^{2} f_X(x)dx \\ &= \frac{(4+2) \cdot \frac{1}{3}}{2} + \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

, όπου το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ υπολογίστηκε ως το εμβαδόν μεταξύ του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου στο Σχήμα ;; και του άξονα $\xi\zeta$. Εναλλακτικά, θα μπορούσε να υπολογιστεί με χρήση τεχνικών ολοκλήρωσης ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)dx + \int_{-2}^{-1} f_X(x)dx + \int_{-1}^1 f_X(x)dx + \int_1^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(x+2)dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx + \int_2^{+\infty} 0dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(x+2)dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3} \left[x \right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3} \left[x \right]_{-1}^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + \frac{2}{3} (-1 + 2) + \frac{1}{3} (1 + 1) - \frac{1}{3} \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} (2 - 1) \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2} \right) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{6}{3} - \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1\end{aligned}$$

(γ) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbb{P} \left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \right) &= \int_{\frac{3}{2}}^2 f_X(x)dx = \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx = -\frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_{\frac{3}{2}}^2 \\ &= -\frac{1}{3} \left(2 - \frac{9}{8} \right) + \frac{2}{3} \left(2 - \frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{7}{8} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{7}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

(δ) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbb{P} \left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2 \right) &= \frac{\mathbb{P}(\frac{3}{2} \leq X \leq 2, 0 \leq X \leq 2)}{\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2)} = \frac{\mathbb{P}(\frac{3}{2} \leq X \leq 2)}{\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2)} = \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 f_X(x)dx}{\int_0^2 f_X(x)dx} \\ &= \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx}{\int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx} = \frac{-\frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_{\frac{3}{2}}^2}{\frac{1}{3} \left[x \right]_0^1 + \left(-\frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_1^2 \right)} = \frac{-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Άσκηση 2

Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η εξής:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c και να σχεδιαστεί η $f(x)$.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα $\mathbb{P}(1 < X < 2)$.

Λύση

(α) Επειδή f είναι συνάρτηση πυκνότητας, πρέπει να ικανοποιεί

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Όμως για $x \leq 0$ η πυκνότητα είναι μηδενική, άρα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} ce^{-2x} dx = 1.$$

Υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\infty} ce^{-2x} dx = c \int_0^{\infty} e^{-2x} dx.$$

Η παράγουσα του e^{-2x} είναι

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C,$$

οπότε

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-2b} \right) - \left(-\frac{1}{2}e^0 \right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Άρα

$$\int_0^{\infty} ce^{-2x} dx = c \cdot \frac{1}{2} = \frac{c}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την προϋπόθεση κανονικοποίησης:

$$\frac{c}{2} = 1 \implies c = 2.$$

Άρα η σ.π.π. είναι

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από το ολοκλήρωμα της σ.π.π. στο διάστημα $(1, 2)$:

$$\mathbb{P}(1 < X < 2) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 2e^{-2x} dx.$$

Χρησιμοποιούμε την ίδια αντιπαράγωγο όπως πριν:

$$\int 2e^{-2x} dx = 2 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \right) + C = -e^{-2x} + C.$$

Επομένως

$$\int_1^2 2e^{-2x} dx = [-e^{-2x}]_1^2 = -e^{-4} - (-e^{-2}) = e^{-2} - e^{-4}.$$

Άρα

$$\mathbb{P}(1 < X < 2) = e^{-2} - e^{-4}.$$

Άσκηση 3

Έστω X_1, X_2, X_3 οι ανεξάρτητοι χρόνοι ζωής τριών τσιπ μνήμης. Υποθέτουμε ότι κάθε X_i ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 300 ώρες και τυπική απόκλιση 10 ώρες. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα από τα τρία τσιπ διαρκεί τουλάχιστον 290 ώρες.

Θέλουμε

$$\mathbb{P}(\text{τουλάχιστον ένα τσιπ διαρκεί} \geq 290 \text{ ώρες}).$$

Λύση

Είναι πιο εύκολο να δουλέψουμε με το συμπληρωματικό γεγονός.

Ορίζουμε

$$A_i = \{\text{το τσιπ } i \text{ διαρκεί το πολύ } 290 \text{ ώρες}\} = \{X_i \leq 290\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Το γεγονός “τουλάχιστον ένα τσιπ διαρκεί ≥ 290 ώρες” είναι το συμπλήρωμα του γεγονότος “όλα τα τσιπ διαρκούν ≤ 290 ώρες”, δηλαδή

$$\{\text{τουλάχιστον ένα} \geq 290\} = \left(\bigcap_{i=1}^3 A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^3 A_i^c.$$

Άρα

$$\mathbb{P}(\text{τουλάχιστον ένα} \geq 290) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right).$$

Επειδή οι χρόνοι ζωής X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητοι, τα γεγονότα A_1, A_2, A_3 είναι επίσης ανεξάρτητα, οπότε

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = \prod_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i).$$

Κάθε X_i έχει την ίδια κατανομή, άρα όλες οι πιθανότητες $\mathbb{P}(A_i)$ είναι ίδιες. Έστω λοιπόν

$$p = \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(X_i \leq 290).$$

Εφόσον $X_i \sim \mathcal{N}(300, 10^2)$, έχουμε:

$$Z = \frac{X_i - 300}{10} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Τότε

$$p = \mathbb{P}(X_i \leq 290) = \mathbb{P}\left(\frac{X_i - 300}{10} \leq \frac{290 - 300}{10}\right) = \mathbb{P}(Z \leq -1) = \Phi(-1).$$

Από πίνακα της κανονικής κατανομής:

$$\Phi(1) \approx 0,8413 \quad \Rightarrow \quad \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

Άρα

$$p \approx 0,1587.$$

Έτσι

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = p^3 \approx (0,1587)^3 \approx 0,0040.$$

Τελικά,

$$\mathbb{P}(\text{τουλάχιστον ένα τσιπ διαρκεί} \geq 290 \text{ ώρες}) = 1 - p^3 \approx 1 - 0,0040 = 0,9960.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0,9960.

Άσκηση 4

Αν η θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ σε μια συγκεκριμένη τοποθεσία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 68 βαθμούς και τυπική απόκλιση 4 βαθμούς, θεωρούμε την αντίστοιχη θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου στο ίδιο σημείο.

(α) Να βρεθεί η κατανομή της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κελσίου.

(β) Να βρεθούν τα τεταρτημόρια 0,25 και 0,75 της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ για την τοποθεσία αυτή.

Λύση

(α) Έστω

$$X \sim \mathcal{N}(68, 4^2)$$

η θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ. Η σχέση μεταξύ Φαρενάιτ και Κελσίου είναι

$$Y = \frac{5}{9}(X - 32),$$

όπου Y είναι η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου.

Η Y είναι γραμμικός μετασχηματισμός της X της μορφής

$$Y = aX + b \quad \text{με} \quad a = \frac{5}{9}, \quad b = -\frac{160}{9}.$$

Αν $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, τότε για κάθε τέτοιο γραμμικό μετασχηματισμό ισχύει

$$Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

Στην περίπτωση μας:

$$\mu_X = 68, \quad \sigma_X = 4.$$

Μέση τιμή της Y :

$$\mathbb{E}(Y) = a\mu_X + b = \frac{5}{9} \cdot 68 - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(68 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 36 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Διακύμανση της Y :

$$\text{Var}(Y) = a^2 \sigma_X^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^2 4^2 = \frac{25}{81} \cdot 16 = \frac{400}{81}.$$

Άρα η τυπική απόκλιση της Y είναι

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{400}{81}} = \frac{20}{9}.$$

Συμπέρασμα:

$$Y \sim \mathcal{N}\left(20, \frac{400}{81}\right).$$

(β) Θυμόμαστε ότι το q -τεταρτημόριο μιας κανονικής κατανομής $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ δίνεται από τον τύπο

$$x_q = \mu + \sigma z_q,$$

όπου z_q είναι το q -ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής $\mathcal{N}(0, 1)$, δηλαδή

$$z_q = \Phi^{-1}(q),$$

με Φ την συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{N}(0, 1)$.

Για την X έχουμε $\mu = 68$, $\sigma = 4$.

(α') 0,25-τεταρτημόριο:

Χρησιμοποιώντας πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής,

$$\Phi^{-1}(0,25) \approx -0,6745.$$

Άρα

$$x_{0,25} = 68 + 4 \cdot (-0,6745) = 68 - 2,698 \approx 65,302.$$

(β') 0,75-τεταρτημόριο: Λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής γύρω από το 0,

$$\Phi^{-1}(0,75) = -\Phi^{-1}(0,25) \approx 0,6745.$$

Επομένως

$$x_{0,75} = 68 + 4 \cdot 0,6745 = 68 + 2,698 \approx 70,698.$$

Άσκηση 5

Υποθέστε ότι ένα σύστημα αποτελείται από τρία εξαρτήματα που λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Λέμε ότι τα εξαρτήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά όταν αναγκαία και ικανή συνθήκη για να λειτουργεί σωστά το σύστημα είναι να λειτουργούν σωστά όλα τα εξαρτήματα. Επομένως, το σύστημα αστοχεί μόλις αστοχήσει οποιοδήποτε από τα εξαρτήματα.

Υποθέστε ότι ο χρόνος ζωής του πρώτου εξαρτήματος, σε ώρες, ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta_1 = 0.001$, ο χρόνος ζωής του δεύτερου εξαρτήματος ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta_2 = 0.003$, και ο χρόνος ζωής του τρίτου εξαρτήματος ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta_3 = 0.006$.

Να προσδιοριστεί η πιθανότητα ότι το σύστημα δεν θα αστοχήσει πριν από 100 ώρες.

Λύση

Θεωρούμε τους χρόνους ζωής των τριών εξαρτημάτων:

$$X_1 \sim \exp(\beta_1 = 0.001), \quad X_2 \sim \exp(\beta_2 = 0.003), \quad X_3 \sim \exp(\beta_3 = 0.006),$$

όπου όλα τα X_i είναι ανεξάρτητα.

Επειδή τα εξαρτήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά, το σύστημα αστοχεί μόλις αστοχήσει κάποιο από τα τρία. Άρα ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι

$$Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}.$$

Θέλουμε την πιθανότητα ότι το σύστημα δεν θα αστοχήσει πριν από τις 100 ώρες:

$$\Pr(Y > 100).$$

Για οποιοδήποτε $y > 0$,

$$\Pr(Y > y) = \Pr(\min\{X_1, X_2, X_3\} > y) = \Pr(X_1 > y, X_2 > y, X_3 > y).$$

Λόγω ανεξαρτησίας:

$$\Pr(Y > y) = \Pr(X_1 > y) \Pr(X_2 > y) \Pr(X_3 > y).$$

Αν $X \sim \exp(\beta)$, τότε

$$\Pr(X > y) = e^{-\beta y}, \quad y > 0.$$

Άρα

$$\Pr(X_1 > y) = e^{-\beta_1 y}, \quad \Pr(X_2 > y) = e^{-\beta_2 y}, \quad \Pr(X_3 > y) = e^{-\beta_3 y}.$$

Επομένως

$$\Pr(Y > y) = e^{-\beta_1 y} e^{-\beta_2 y} e^{-\beta_3 y} = e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)y}.$$

Αυτή είναι ακριβώς η συνάρτηση επιβίωσης μιας εκθετικής κατανομής με παράμετρο

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.001 + 0.003 + 0.006 = 0.01.$$

Άρα

$$Y \sim \exp(0.01).$$

Για $Y \sim \exp(0.01)$:

$$\Pr(Y > 100) = e^{-0.01 \cdot 100} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.3679.$$

Άσκηση 6

Δίνεται η τυχαία μεταβλητή $X \sim U[2, 10]$, δηλαδή η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[2, 10]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 - 12X + 35 > 0$.

Λύση

Ισχύει ότι

$$X^2 - 12X + 35 = (X - 5)(X - 7).$$

Οπότε, $X^2 - 12X + 35 > 0$ αν και μόνο αν $\{X > 7\} \cup \{X < 5\}$.

Εφόσον $X \sim U[2, 10]$, έχουμε

$$f_X(x) = \frac{1}{8} \quad \text{για } x \in [2, 10] \quad \text{και} \quad f_X(x) = 0, \text{ αλλού.}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^2 - 12X + 35 > 0) &= \mathbb{P}(\{X > 7\} \cup \{X < 5\}) \cap \{2 \leq X \leq 10\}) \\ &= \mathbb{P}(\{2 \leq X < 5\} \cup \{7 < X \leq 10\}) \\ &= \mathbb{P}(\{2 \leq X < 5\}) + \mathbb{P}(\{7 < X \leq 10\}) \\ &= \frac{1}{8}(5 - 2) + \frac{1}{8}(10 - 7) \\ &= 0.75. \end{aligned}$$