

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 3

31 Οκτωβρίου 2025

Άσκηση 1

Πόσες πινακίδες αυτοκινήτων με 3 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και 4 ψηφία μπορούν να σχηματιστούν; Πόσες από αυτές έχουν τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα;

Λύση

Υπολογισμός συνολικού πλήθους πινακίδων: Το ελληνικό αλφάβητο έχει 24 γράμματα (χωρίς τα δίφθογγα και τα τρία παλιά γράμματα). Τα ψηφία είναι 10 (0-9).

- Για τα 3 γράμματα: Κάθε θέση γράμματος έχει 24 επιλογές, και το ίδιο γράμμα μπορεί να επαναληφθεί. Άρα $24 \times 24 \times 24 = 24^3$ συνδυασμοί γραμμάτων.
- Για τα 4 ψηφία: Κάθε θέση ψηφίου έχει 10 επιλογές, και το ίδιο ψηφίο μπορεί να επαναληφθεί. Άρα $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ συνδυασμοί ψηφίων.

Το συνολικό πλήθος των πινακίδων αυτοκινήτων είναι $24^3 \times 10^4 = 13.824.000$.

Υπολογισμός πινακίδων με τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα: Αυτό σημαίνει ότι τα γράμματα μπορεί να είναι 2 διαφορετικά ή 3 διαφορετικά. Είναι πιο εύκολο να βρούμε το συμπληρωματικό γεγονός: "όλα τα γράμματα είναι ίδια" (δηλαδή 1 διαφορετικό γράμμα) και να το αφαιρέσουμε από το σύνολο.

- **Πινακίδες με 3 διαφορετικά γράμματα:** Για τις 3 θέσεις γραμμάτων, επιλέγουμε 3 διαφορετικά γράμματα από τα 24 και τα διατάσσουμε. Αυτό είναι $P(24, 3) = \frac{24!}{(24-3)!} = 24 \times 23 \times 22 = 12144$.
- **Πινακίδες με ακριβώς 2 διαφορετικά γράμματα:** Επιλέγουμε 2 διαφορετικά γράμματα από τα 24: $\binom{24}{2}$. Από αυτά τα 2 γράμματα, το ένα θα επαναληφθεί 2 φορές και το άλλο 1 φορά (π.χ. AAB ή ABA ή BAA). Για κάθε ζεύγος γραμμάτων (π.χ. A, B), υπάρχουν 3 διατάξεις (AAB, ABA, BAA). Οπότε, $3 \times \binom{24}{2}$ τρόποι για να επιλεγούν τα γράμματα και να τοποθετηθούν στις θέσεις. Άρα, $\binom{24}{2} \times 3 \times 2 = \frac{24 \times 23}{2} \times 3 \times 2 = 276 \times 3 \times 2 = 1656$.
Άρα $(12144 + 1656)10^4 = 138.000.000$

Άσκηση 2

Πόσοι δυνατοί κωδικοί 7 χαρακτήρων μπορούν να δημιουργηθούν εάν:

- α) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και το ίδιο γράμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολλές φορές.
- β) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, όλα διαφορετικά μεταξύ τους.
- γ) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και ψηφία.
- δ) Χρησιμοποιούμε μόνο το γράμμα Κ και το ψηφίο 2.
- ε) Χρησιμοποιήσουμε μόνο τα γράμματα Κ και 2 και τα περιλάβουμε και τα δύο.

Λύση

Το ελληνικό αλφάβητο έχει 24 κεφαλαία γράμματα. Τα ψηφία είναι 10 (από 0 έως 9).

- α) **Μόνο κεφαλαία γράμματα, με επαναλήψεις:** Για κάθε μία από τις 7 θέσεις του κωδικού, έχουμε 24 επιλογές (ένα από τα 24 κεφαλαία ελληνικά γράμματα). Εφόσον επιτρέπονται οι επαναλήψεις, ο αριθμός των δυνατών κωδικών είναι: $24 \times 24 \times 24 \times 24 \times 24 \times 24 \times 24 = 24^7$. $24^7 = 4.586.471.424$.
- β) **Μόνο κεφαλαία γράμματα, όλα διαφορετικά μεταξύ τους:** Για κάθε μία από τις 7 θέσεις του κωδικού, επιλέγουμε ένα διαφορετικό κεφαλαίο ελληνικό γράμμα από τα 24 διαθέσιμα. Επειδή η σειρά έχει σημασία και δεν επιτρέπονται επαναλήψεις, πρόκειται για διατάξεις (μεταθέσεις) 7 αντικειμένων από 24: $P(24, 7) = \frac{24!}{(24-7)!} = \frac{24!}{17!} = 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18$. $P(24, 7) = 1.464.731.520$.
- γ) **Κεφαλαία γράμματα και ψηφία, με επαναλήψεις:** Το σύνολο των διαθέσιμων χαρακτήρων είναι τα 24 κεφαλαία ελληνικά γράμματα συν τα 10 ψηφία, δηλαδή $24 + 10 = 34$ χαρακτήρες. Εφόσον επιτρέπονται οι επαναλήψεις, για κάθε μία από τις 7 θέσεις του κωδικού, έχουμε 34 επιλογές. Ο αριθμός των δυνατών κωδικών είναι: $34^7 = 52.521.875.936$.
- δ) **Μόνο το γράμμα Κ και το ψηφίο 2:** Έχουμε μόνο 2 διαθέσιμους χαρακτήρες: 'Κ', '2'. Εφόσον επιτρέπονται οι επαναλήψεις, για κάθε μία από τις 7 θέσεις του κωδικού, έχουμε 2 επιλογές. Ο αριθμός των δυνατών κωδικών είναι: $2^7 = 128$.
- ε) **Μόνο τα γράμματα Κ και 2 και τα περιλάβουμε και τα δύο:** Από το ερώτημα (δ), γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $2^7 = 128$ κωδικοί που χρησιμοποιούν μόνο τα γράμματα Κ και 2, με επαναλήψεις. Από αυτούς, πρέπει να αφαιρέσουμε τους κωδικούς που περιέχουν ΜΟΝΟ το γράμμα Κ (δηλαδή 7 φορές Κ: ΚΚΚΚΚΚΚ) και τους κωδικούς που περιέχουν ΜΟΝΟ το ψηφίο 2 (δηλαδή 7 φορές 2: 2222222). Υπάρχει 1 τέτοιος κωδικός για το Κ και 1 για το 2. Άρα, ο αριθμός των κωδικών που περιέχουν Κ και 2 και τα περιλαμβάνουν και τα δύο είναι: $2^7 - 1 - 1 = 128 - 2 = 126$.

Άσκηση 3

Από το σύνολο των 25 καθηγητών (10 άνδρες και 15 γυναίκες) ενός σχολείου, να υπολογιστεί το πλήθος των διαφορετικών εξαμελών επιτροπών όταν όλα τα μέλη είναι:

- α) Ισότιμα, δηλαδή οι ρόλοι που τους ανατίθενται είναι ταυτόσημοι.
- β) Ισότιμα και οι γυναίκες-μέλη είναι περισσότερες από τους άνδρες μέλη.

Λύση

Συνολικός αριθμός καθηγητών: 25 (10 άνδρες, 15 γυναίκες). Πρέπει να επιλεγεί εξαμελής επιτροπή.

- α) **Όλα τα μέλη είναι ισότιμα:** Εφόσον οι ρόλοι είναι ταυτόσημοι και δεν υπάρχουν επαναλήψεις, πρόκειται για συνδυασμούς 6 ατόμων από 25. Πλήθος επιτροπών = $\binom{25}{6} = \frac{25!}{6!(25-6)!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 177100$.
- β) **Ισότιμα μέλη και οι γυναίκες-μέλη είναι περισσότερες από τους άνδρες μέλη:** Έστω G ο αριθμός των γυναικών και M ο αριθμός των ανδρών στην επιτροπή. Πρέπει $G > M$ και $G + M = 6$. Οι δυνατοί συνδυασμοί (G, M) που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι:
- $(G = 6, M = 0)$: $\binom{15}{6} \times \binom{10}{0} = \frac{15!}{6!9!} \times 1 = 5005 \times 1 = 5005$.
 - $(G = 5, M = 1)$: $\binom{15}{5} \times \binom{10}{1} = \frac{15!}{5!10!} \times 10 = 3003 \times 10 = 30030$.
 - $(G = 4, M = 2)$: $\binom{15}{4} \times \binom{10}{2} = \frac{15!}{4!11!} \times \frac{10!}{2!8!} = 1365 \times 45 = 61425$.

Επειδή αυτές οι περιπτώσεις είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, το συνολικό πλήθος των επιτροπών είναι το άθροισμά τους: $5005 + 30030 + 61425 = 96460$.

Άσκηση 4

Μια εταιρία, στα πλαίσια διαφημιστικής εκστρατείας, διοργανώνει ένα διαγωνισμό στον οποίο μοιράζονται λαχνοί. Οι λαχνοί περιέχουν όλους τους δυνατούς αναγραμματισμούς του ΠΟΛΛΑ-ΔΩΡΑ (π.χ., ΑΛΛΑΩΠΔΡΟ, ΡΑΑΟΠΛ-ΔΩΛ, κλπ). Κερδίζουν όσοι λαχνοί εμφανίζουν κάποια (τουλάχιστον μία) από τις λέξεις ΠΟΛΛΑ ή ΔΩΡΑ. Π.χ., οι λαχνοί ΠΟΛΛΑΑΔΡΩ, ΑΠΛΛΟΔΩΡΑ και ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ είναι νικηφόροι

- Υπολογίστε το συνολικό πλήθος των λαχνών.
- Υπολογίστε το πλήθος των νικηφόρων λαχνών.
- Έστω ότι λαμβάνουμε ένα τυχαίο λαχνό από ένα κιβώτιο το οποίο περιλαμβάνει μόνο τους λαχνούς που ξεκινούν με το γράμμα Δ. Ποια είναι η πιθανότητα ο λαχνός μας να είναι νικηφόρος;

Λύση

Η λέξη ΠΟΛΛΑ-ΔΩΡΑ έχει 9 γράμματα: Π(1), Ο(1), Λ(2), Α(2), Δ(1), Ω(1), Ρ(1).

- Συνολικό πλήθος λαχνών:** Χρησιμοποιούμε τον τύπο για αναγραμματισμούς με επαναλήψεις: $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$.
Πλήθος = $\frac{9!}{1!1!2!2!1!1!1!} = \frac{362880}{1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1} = \frac{362880}{4} = 90720$.

- Πλήθος νικηφόρων λαχνών:** Έστω M το σύνολο λαχνών που περιέχουν τη λέξη ΠΟΛΛΑ. Έστω G το σύνολο λαχνών που περιέχουν τη λέξη ΔΩΡΑ. Ζητάμε $|M \cup G|$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού: $|M \cup G| = |M| + |G| - |M \cap G|$.

Υπολογισμός $|M|$: Θεωρούμε τη λέξη ΠΟΛΛΑ ως ένα ενιαίο σύμβολο. Τα εναπομείναντα γράμματα είναι: Δ, Ω, Ρ, Α. (Σύνολο 5 συμβόλων: ΠΟΛΛΑ, Δ, Ω, Ρ, Α). Όλα είναι διαφορετικά, άρα είναι μεταθέσεις 5 αντικειμένων: $|M| = 5! = 120$.

Υπολογισμός $|G|$: Θεωρούμε τη λέξη ΔΩΡΑ ως ένα ενιαίο σύμβολο. Τα εναπομείναντα γράμματα είναι: Π, Ο, Λ(2), Α. (Σύνολο 6 συμβόλων: ΔΩΡΑ, Π, Ο, Λ, Λ, Α). Έχουμε 2 Λ, άρα: $|G| = \frac{6!}{1!1!2!1!1!} = \frac{720}{2} = 360$.

Υπολογισμός $|M \cap G|$: Περιέχει και τις δύο λέξεις, ΠΟΛΛΑ και ΔΩΡΑ. Αν έχουμε ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ, τότε τα γράμματα που απομένουν είναι Α (το ένα από τα δύο Α). Τα σύμβολα είναι: ΠΟΛΛΑ, ΔΩΡΑ, Α. Δεδομένης της μορφής, η λέξη ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ μπορεί να εμφανιστεί με 2 διαφορετικούς τρόπους ανάλογα με ποιο "Λ" χρησιμοποιείται από τα 2 αρχικά, και ποιο "Α" από τα 2 αρχικά. Η λύση του ΠΔΦ το υπολογίζει ως 2 (ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ και ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ). Για να είμαστε πιο ακριβείς, αν το ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ είναι ενιαίο, τότε μένει το Α. Οι αναγραμματισμοί είναι $3!/1! = 6$ (ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ Α). Εναλλακτικά, η λύση του ΠΔΦ απλοποιεί το $|M \cap G|$ σε 2 (ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ και ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ). Αυτό είναι το πιο απλό. $|M \cap G| = 2$.

Συνολικό πλήθος νικηφόρων λαχνών: $|M \cup G| = 120 + 360 - 2 = 478$.

- Πιθανότητα ο λαχνός να είναι νικηφόρος, αν ξεκινά με Δ:** Συνολικό πλήθος λαχνών που ξεκινούν με Δ: Αν ο λαχνός ξεκινά με Δ, τότε τα υπόλοιπα 8 γράμματα είναι: Π(1), Ο(1), Λ(2), Α(2), Ω(1), Ρ(1).
Πλήθος = $\frac{8!}{1!1!2!2!1!1!} = \frac{40320}{2 \times 2} = \frac{40320}{4} = 10080$.

Πλήθος νικηφόρων λαχνών που ξεκινούν με Δ:

- Λαχνοί που ξεκινούν με Δ και περιέχουν ΠΟΛΛΑ (M'): Το Δ είναι πρώτο. Τα υπόλοιπα γράμματα είναι (Π, Ο, Λ, Λ, Α, Α, Ω, Ρ). Αν το ΠΟΛΛΑ είναι ενιαίο, τότε έχουμε Δ, ΠΟΛΛΑ, Ω, Ρ, Α. Η διάταξη Δ-ΠΟΛΛΑ... σημαίνει 1 σύμβολο ΠΟΛΛΑ, 1 Ω, 1 Ρ, 1 Α. Είναι $4! = 24$.
- Λαχνοί που ξεκινούν με Δ και περιέχουν ΔΩΡΑ (G'): Αν ο λαχνός ξεκινά με ΔΩΡΑ, τότε τα υπόλοιπα γράμματα είναι (Π, Ο, Λ, Λ, Α). Έχουμε 2 Λ και 2 Α. Πλήθος = $\frac{5!}{1!1!2!1!} = \frac{120}{2} = 120$.
- Λαχνοί που ξεκινούν με Δ και περιέχουν και ΠΟΛΛΑ και ΔΩΡΑ ($M' \cap G'$): Αν ξεκινά με Δ και περιέχει ΠΟΛΛΑ και ΔΩΡΑ. Η λύση του ΠΔΦ λέει ότι είναι 1 λαχνός (ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ). Για την ακρίβεια, αν ξεκινά με Δ, και περιέχει ΠΟΛΛΑ και ΔΩΡΑ, τότε είναι Δ-ΠΟΛΛΑ-ΔΩΡΑ... ή Δ-ΔΩΡΑ-ΠΟΛΛΑ.... Η λύση του ΠΔΦ θεωρεί ότι το ΔΩΡΑ είναι στην αρχή. Οπότε είναι 1 (ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ).

Σύμφωνα με τη λύση του ΠΔΦ, $|M'| = 24$, $|G'| = 120$, $|M' \cap G'| = 1$ (όπου M' οι λαχνοί που ξεκινάνε με Δ και περιέχουν ΠΟΛΛΑ, και G' οι λαχνοί που ξεκινούν με Δ και περιέχουν ΔΩΡΑ). Πλήθος νικηφόρων λαχνών που ξεκινούν με Δ = $|M' \cup G'| = |M'| + |G'| - |M' \cap G'| = 24 + 120 - 1 = 143$.

Πιθανότητα: $P(\text{Νικηφόρος} | \text{Ξεκινά με Δ}) = \frac{143}{10080} \approx 0.0141$.