

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
22 Νοεμβρίου 2025 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

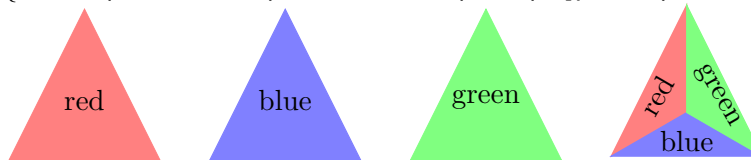
Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες

Ένα τετράεδρο έχει τις 4 πλευρές του βαμμένες όπως φαίνεται στο Σχήμα 1: μία είναι βαμμένη όλη κόκκινη, μία είναι μπλε, μία πράσινη και μία βαμμένη κόκκινη, μπλε και πράσινη. Ρίχνουμε το τετράεδρο και η πιθανότητα μία οποιαδήποτε πλευρά του να ακουμπάει στο πάτωμα είναι ίση με $\frac{1}{4}$. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

$R = \{ \text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το κόκκινο χρώμα} \}$

$B = \{ \text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το μπλε χρώμα} \}$

$G = \{ \text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το πράσινο χρώμα} \}$



Σχήμα 1: Οι 4 πλευρές του τετράεδρου του πρώτου θέματος.

- (α) Υπολογίστε τις πιθανότητες των γεγονότων R , B και G .
- (β) Είναι τα γεγονότα R , B και G ανά δύο ανεξάρτητα;
- (γ) Είναι τα γεγονότα R , B και G ανεξάρτητα;

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνδυαστική

Έστω ότι πρέπει να τοποθετήσουμε 90 ξεχωριστούς servers σε δύο ράφια ενός datacenter: το ράφι Α έχει 60 διακριτές θέσεις (slots) και το ράφι Β έχει 40 θέσεις. (Ενδιαφερόμαστε ποιος server πάει σε ποιο ράφι και σε ποιο ακριβές slot κάθε ραφιού.)

- (α) Πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης των 90 servers στα δύο ράφια;
- (β) Αν από τους 90 servers οι 50 είναι μοντέλα τύπου-G και οι 40 τύπου-X, πόσοι είναι οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης όλων των servers στα δύο ράφια υπό την προϋπόθεση ότι όλα τα μοντέλα τύπου-X βρίσκονται στο ίδιο ράφι;

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Ολική πιθανότητα και Bayes

Η Σοφία περνά μπροστά από ένα κουτί που περιέχει δύο ειδών σοκολάτες: ION γάλακτος και ION αμυγδάλου. Στο κουτί υπάρχουν τρεις φορές περισσότερες ION γάλακτος από ION αμυγδάλου. Η Σοφία επιλέγει μία σοκολάτα στην τύχη. Αν επιλέξει μία ION γάλακτος, την τρώει με πιθανότητα $1/5$. Αν επιλέξει μία ION αμυγδάλου, την τρώει με πιθανότητα $2/5$.

- (α) Με ποια πιθανότητα η Σοφία τρώει τη σοκολάτα που επέλεξε;
- (β) Δεδομένου ότι η Σοφία έφαγε τη σοκολάτα, ποια είναι η πιθανότητα ότι αυτή ήταν μία ION αμυγδάλου;

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Δοκιμές Bernoulli

Ένα σώμα 3 δικαστών πρέπει να πάρει μία απόφαση *υπέρ* ή *κατά*. Η απόφαση παίρνεται κατά πλειοψηφία. Κάθε δικαστής ψηφίζει, μυστικά και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, *υπέρ* με πιθανότητα p . Ορίζουμε το γεγονός M ότι η απόφαση του σώματος είναι *υπέρ* (δηλαδή, η πλειοψηφία των δικαστών ψήφισε *υπέρ*), και το γεγονός A ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε *υπέρ*.

(α) Τι κατανομή ακολουθεί η τ.μ. X , ο αριθμός των δικαστών που ψηφίζει *υπέρ*; Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των δικαστών που ψηφίζουν *υπέρ*;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(M)$.

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(M/A)$.

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(A/M)$. Δώστε τη γραφική παράσταση της $P(A/M)$ ως συνάρτηση του p . Ποια είναι τα όρια της $P(A/M)$ καθώς $p \rightarrow 0$ και $p \rightarrow 1$. Με δύο προτάσεις σχολιάστε αυτά τα όρια.

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Οι διακριτές ομοιόμορφες τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και παίρνουν ως τιμές τους τέσσερις ακεραίους αριθμούς $\{1, 2, 3, 4\}$. Υπολογίστε τα ακόλουθα:

(α) $E[X]$

(β) $E[XY]$

(γ) Από κοινού κατανομή των X και Y , $p_{X,Y}(x, y)$.

(δ) Δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου του γεγονότος $A = \{XY = 4\}$, δηλαδή τις πιθανότητες $P(X = k/XY = 4)$ για $k = 1, 2, 3, 4$.