

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
23 Νοεμβρίου 2024 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες

Το 55% των φοιτητών ενός Τμήματος είναι γυναίκες, εκ των οποίων τα $4/5$ έχουν μακριά μαλλιά. Το 45% των φοιτητών ενός Τμήματος είναι άνδρες, εκ των οποίων το $1/3$ έχουν μακριά μαλλιά. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής είναι γυναίκα ή έχει μακριά μαλλιά;

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνδυαστική

Τοποθετούμε 25 μαύρες μπάλες σε ένα πλέγμα 5 επί 5, δηλαδή σε πέντε σειρές, με κάθε σειρά να περιέχει 5 μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία 5 από τις μπάλες και τις βάφουμε κόκκινες.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι οι κόκκινες μπάλες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι οι κόκκινες μπάλες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες;

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Ολική πιθανότητα και Bayes

Έχουμε δύο δοχεία A και B. Το δοχείο A περιέχει 3 άσπρες και 2 κόκκινες σφαίρες ενώ το δοχείο B περιέχει 4 άσπρες και 6 κόκκινες σφαίρες. Ρίχνουμε ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι. Αν φέρουμε ρίψη μικρότερη ή ίση με 4, διαλέγουμε το δοχείο A, αλλιώς το δοχείο B. Στη συνέχεια βγάζουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(α) Να βγάλουμε κόκκινη σφαίρα.

(β) Να έχουμε επιλέξει το δοχείο B αν είναι γνωστό ότι η σφαίρα που βγάλαμε είναι κόκκινη.

(γ) Να βγάλουμε από το ίδιο δοχείο και δεύτερη κόκκινη σφαίρα δεδομένου ότι η πρώτη ήταν κόκκινη (υποθέστε δειγματοληψία χωρίς επανάθεση).

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Δοκιμές Bernoulli και συναρτήσεις τ.μ.

Η εταιρία Ελληνικό Μετρό δημιουργεί τους συρμούς του νέου μετρό της Θεσσαλονίκης στη γραμμή Νέα Ελβετία-Σιδηροδρομικός Σταθμός με τον εξής αλγόριθμο: Στο μηχανοστάσιο της Νέας Ελβετίας υπάρχουν συνολικά 6 βαγόνια. Αν ένα βαγόνι λειτουργεί, τότε προστίθεται στο συρμό. Αν δεν λειτουργεί, τότε παραμένει στο μηχανοστάσιο. Ένα τυχαία επιλεγμένο βαγόνι λειτουργεί με πιθανότητα $2/3$, ανεξάρτητα από όλα τα υπόλοιπα. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X ως το μήκος του συρμού, δηλαδή το πλήθος των βαγονιών που τον αποτελούν.

(α) Ποια είναι η κατανομή της τ.μ. X ; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της συνάρτησης πιθανότητας της X .

(β) Ποιο είναι το αναμενόμενο μήκος του συρμού, $E[X]$;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι δεν υπάρχει συρμός στη γραμμή Νέα Ελβετία-Σιδηροδρομικός Σταθμός;

(δ) Το πλήθος των επιβατών που μπορούν να χωρέσουν στο συρμό είναι ίσο με $50X$ (δηλαδή, κάθε βαγόνι χωρά 50 επιβάτες). Έστω Y η τ.μ. που περιγράφει το πλήθος των επιβατών που *θέλουν* να ταξιδέψουν με το συρμό. Η τ.μ. Y ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 101 και 200, δηλαδή

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{100} & y = 101, 102, \dots, 199, 200 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος:

$$A = \{\text{ο συρμός μπορεί να μεταφέρει όλους τους επιβάτες που επιθυμούν να ταξιδέψουν}\}.$$

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y . Οι τιμές που αντιστοιχούν στις πιθανότητες $p_{X,Y}(-1, 1)$, $p_{X,Y}(0, -1)$ και $p_{X,Y}(0, 0)$ πρέπει να υπολογιστούν. Δίνεται ότι $p_X(-1) = 9/18$ και $P(|X| = |Y|) = 10/18$.

		X		
		$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
Y	$y = -1$	$3/18$	;	0
	$y = 0$	$4/18$	;	$2/18$
	$y = 1$	;	$1/18$	$3/18$

(α) Υπολογίστε τις τιμές $p_{X,Y}(-1, 1)$, $p_{X,Y}(0, -1)$ και $p_{X,Y}(0, 0)$ που λείπουν.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. X να παίρνει τιμές μικρότερες από την τ.μ. Y .

(γ) Υπολογίστε την οριακή σ.π. της τ.μ. X , $p_X(x)$. Ομοίως για την τ.μ. Y .

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y = 0 \mid |X| = 1)$.

(ε) Προσδιορίστε τη δεσμευμένη σ.π. της Y δεδομένου ότι $X = 1$, $p_{Y|X}(y|x = 1)$. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένου ότι $X = 1$, $E[Y|X = 1]$.