Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
21 Ιανουαρίου 2026 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Πιθανότητες με απλές συνεχείς τ.μ.
Η διάρκεια αποστολής ενός SMS σε δευτερόλεπτα έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[1,\ 3]$ και η διάρκεια αποστολής ενός MMS έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή τα 8 δευτερόλεπτα. Στέλνουμε, σε τρεις *ανεξάρτητες* αποστολές, 2 SMS και ένα MMS.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή της συνολικής διάρκειας αποστολής;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα και τα 2 SMS να έχουν διάρκεια πάνω από 2 δευτερόλεπτα το καθένα;
(γ) Ποια είναι η πιθανότητα το MMS να έχει διάρκεια μεγαλύτερη από τη μέση τιμή της συνολικής διάρκειας των 2 SMS;
(δ) Δεδομένου ότι το MMS έχει διάρκεια πάνω από 10 δευτερόλεπτα, ποια η πιθανότητα να διαρκέσει μεταξύ 10 και 20 δευτερολέπτων;

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνεχείς τ.μ., ΘΟΠ, ανεξαρτησία και κανόνας του Bayes
Έστω μία διακριτή τ.μ. X η οποία παίρνει τις τιμές 1, 2 και 3, με πιθανότητα 1/3 την καθεμία. Δεδομένου ότι $X = a$ ($a = 1, 2, 3$), ορίζουμε δύο συνεχείς τ.μ. Y_1 και Y_2, οι οποίες είναι *ανεξάρτητες* μεταξύ τους και ακολουθούν και οι δύο ομοιόμορφη κατανομή στο συνεχές διάστημα $[0,\ a]$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{Y_1 \leq 1/2\}$.
(β) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ($\sigma.\pi.\pi.$) της τ.μ. Y_1.
(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος $\{Y_1 \leq 1/2,\ Y_2 \leq 1/2\}$ δεδομένου ότι $X = 1$.
(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος $X = 1$ δεδομένου ότι $\{Y_1 \leq 1/2,\ Y_2 \leq 1/2\}$.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Γκαουσιανή Κατανομή.
Σφάλμα συγχρονισμού αισθητήρων. Σε ένα σύστημα παρακολούθησης, δύο αισθητήρες θα έπρεπε ιδανικά να καταγράφουν ένα γεγονός την ίδια χρονική στιγμή. Λόγω θερμικού θορύβου, κάθε καταγραφή του πρώτου αισθητήρα παρουσιάζει χρονικό σφάλμα X (σε ms, χιλιοστά του δευτερολέπτου), ενώ κάθε καταγραφή του δεύτερου αισθητήρα παρουσιάζει χρονικό σφάλμα Y. Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κανονικές κατανομές: Η τ.μ. X ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 0.04, $X \sim N(0,\ 0.04)$, ενώ η τ.μ. Y ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 0.01, $Y \sim N(0,\ 0.01)$. Το σύστημα πραγματοποιεί 100 ανεξάρτητες καταγραφές και σε κάθε καταγραφή το σφάλμα συγχρονισμού είναι: $Z = X - Y$

(α) Να προσδιορίσετε την κατανομή της τ.μ. Z.
(β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του μέσου συνολικού σφάλματος

$$W = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} Z_i$$

όπου Z_i είναι το σφάλμα της i-οστής καταγραφής.
(γ) Ποια είναι η πιθανότητα το μέσο σφάλμα συγχρονισμού να ξεπερνά σε απόλυτη τιμή τα 0.05 ms, δηλαδή $P(|W| > 0.05)$; Εκφράστε την απάντησή σας με βάση τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(\cdot)$.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Από κοινού κατανομές.

Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ($\sigma.\pi.\pi.$):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{για } 0 \leq x \leq y \leq 3, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Έστω τα δύο γεγονότα $A = \{Y \leq 2\}$ και $B = \{X + Y \geq 3\}$.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού $\sigma.\pi.\pi.$ και υπολογίστε τη σταθερά c.
(β) Υπολογίστε την περιθώρια $\sigma.\pi.\pi.$, $f_X(x)$, της τ.μ. X καθώς και την περιθώρια $\sigma.\pi.\pi.$, $f_Y(y)$, της τ.μ. Y. Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες μεταξύ τους;
(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(B \mid A)$.
(δ) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της δεσμευμένης $\sigma.\pi.\pi.$ της Y δεδομένου του $X = 1$, $f_{Y|X}(y \mid x = 1)$.

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής και Μετασχηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών.

Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ($\sigma.\pi.\pi.$)

$$f_X(x) = ce^{-\frac{|x|}{2}} \quad -\infty < x < +\infty, \;\; c : \text{σταθερά.}$$

(α) Να δώσετε τη γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$ και να υπολογίσετε τη σταθερά c.
(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής ($\alpha.\sigma.\kappa.$) της τ.μ. X και δώστε την γραφική της παράσταση.
(γ) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(|X| \geq 0.4)$ και $P(X = 0.5)$.
(δ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y = X^2$.
(ε) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $Y = X^2$.
(ζ) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(Y < 0.5)$ και $P(Y \geq -0.5)$.