

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/11/2025

Ημερομηνία Παράδοσης: 09/12/2025

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x)^3 & , \text{ αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

- (α) Βρείτε το c έτσι ώστε η $f_X(x)$ να ικανοποιεί τις συνθήκες μίας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της X .
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = 0.6)$.
- (ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{4}{3}\right)$.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{1-x}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{k}{x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c ώστε η $f_1(x)$ να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

- (β) Έστω τυχαία μεταβλητή X με σ.π.π. $f_1(x)$. Υπολογίστε την πιθανότητα $\Pr(X \leq 1/2)$.
- (γ) Υπάρχει σταθερά k ώστε η $f_2(x)$ να μπορεί να είναι σ.π.π.; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (δ) Σχολιάστε τα ευρήματά σας στα προηγούμενα ερωτήματα.

Άσκηση 3

Έστω X_1 και X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x^2}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{για } i = 1, 2.$$

- (α) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X = \max\{X_1, X_2\}$.
- (β) Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

Άσκηση 4

Η ποσότητα X του καφέ που βρίσκεται σε πακέτα των 200 γρ. είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 200 και διασπορά 16, $X \sim \mathcal{N}(200, 16)$. Αγοράζουμε τέσσερα πακέτα των 200 γρ. Ποια είναι η πιθανότητα:

- (α) Ένα μόνο πακέτο από τα τέσσερα να περιέχει τουλάχιστον 192 γρ. καφέ.
- (β) Το καθένα από τα τέσσερα να έχει βάρος μεταξύ 192 και 204 γρ.

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(1)$ και $\Phi(2)$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Άσκηση 5

Ένα εργοστάσιο παραγωγής λαμπτήρων φτιάχνει λαμπτήρες όπου η διάρκεια ζωής (σε χρόνια) τους μοντελοποιείται με μια εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\mathbb{E}[X] = 5$ χρόνια.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ένας λαμπτήρας να συνεχίζει να λειτουργεί ακόμα μετά από 6 χρόνια;
- (β) Τι ποσοστό των λαμπτήρων θα συνεχίζει να λειτουργεί για περισσότερο από 3, αλλά λιγότερο από 7 χρόνια;
- (γ) Αν τα A και B είναι τα γεγονότα των ερωτημάτων (α) και (β) αντίστοιχα, είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα;
- (δ) Το εργοστάσιο δεσμεύεται να αντικαταστήσει τον λαμπτήρα αν παρουσιαστεί βλάβη σε διάστημα μικρότερο του χρόνου εγγύησης. Για πόσα χρόνια μπορεί να δίνει η εταιρεία εγγύηση, προκειμένου το ποσοστό των λαμπτήρων που αντικαθίστανται να είναι μικρότερο από 10%;

Άσκηση 6

Ένα ηλεκτρονικό σύστημα αποτελείται από τέσσερα εξαρτήματα. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_j παριστάνει τον χρόνο μέχρι να σταματήσει το εξάρτημα $j = 1, 2, 3, 4$ να λειτουργεί. Υποθέτουμε ότι οι X_1, X_2, X_3, X_4 είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανομημένα τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$. Το σύστημα συνεχίζει να λειτουργεί όσο το εξάρτημα 1, και τουλάχιστον ένα από τα άλλα τρία εξαρτήματα (2, 3, 4) λειτουργούν. Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής T , όπου T είναι ο χρόνος μέχρι να πάψει να λειτουργεί το σύστημα.

Άσκηση 7

Θεωρούμε τις παρακάτω τέσσερις ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες (σε κάθε περίπτωση) τυχαίες μεταβλητές:

- $X^{(1)} \sim U(0, 1)$ (ομοιόμορφη στο $(0, 1)$),
- $X^{(2)} \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, π.χ. $\lambda_1 = 1$,
- $X^{(3)} \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, π.χ. $\lambda_2 = 1/2$,
- $X^{(4)} \sim N(\mu, \sigma^2)$, π.χ. $\mu = 0, \sigma^2 = 1$.

Να γράψετε πρόγραμμα σε Python ή Matlab που:

- (α) Για κάθε μία από τις παραπάνω κατανομές ορίζει συνάρτηση που επιστρέφει ένα διάνυσμα με n ανεξάρτητα δείγματα (π.χ. $n = 30$) της αντίστοιχης τυχαίας μεταβλητής.
- (β) Για κάθε κατανομή $X^{(j)}$ εκτελεί την εξής διαδικασία:
- Επαναλαμβάνει N «πειράματα» (π.χ. $N = 10^4$).
 - Σε κάθε πείραμα παράγει n ανεξάρτητα δείγματα $X_1^{(j)}, \dots, X_n^{(j)}$ και υπολογίζει τον δειγματικό μέσο

$$\bar{X}^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(j)}.$$

- Αποθηκεύει όλους τους N δειγματικούς μέσους $\bar{X}^{(j)}$ σε έναν πίνακα.

(γ) Για κάθε $j = 1, 2, 3, 4$:

- (α') Υπολογίζει και εκτυπώνει στην οθόνη την εμπειρική μέση τιμή και την εμπειρική διασπορά των N δειγματικών μέσων $\bar{X}^{(j)}$, και τις συγκρίνει με τις θεωρητικές τιμές $\mathbb{E}[X^{(j)}]$ και $\text{Var}(X^{(j)})/n$.
- (β') Παρουσιάζει την κατανομή των δειγματικών μέσων με ιστόγραμμα (κανονικοποιημένο σε πυκνότητα). Προαιρετικά, να σχεδιάσετε στην ίδια εικόνα και την καμπύλη της κανονικής κατανομής με παραμέτρους

$$N\left(\mathbb{E}[X^{(j)}], \frac{\text{Var}(X^{(j)})}{n}\right).$$

- (δ) Επαναλάβετε το βήμα β-γ για διαφορετικές τιμές του μεγέθους δείγματος n (π.χ. $n = 5, 20, 50, 100$) για μία από τις κατανομές (π.χ. την εκθετική με $\lambda_1 = 1$) και σχολιάστε πώς αλλάζει το σχήμα του ιστογράμματος των δειγματικών μέσων.