

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 10/12/2025

Ημερομηνία Παράδοσης: 7/1/2026

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X και Y με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x+y), & 2 < x < 6, 0 < y < 5, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (α') Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c .
- (β') Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y .
- (γ') Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(3 < X < 4, Y > 2)$.
- (δ') Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 3)$.
- (ε') Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X + Y > 4)$.
- (ς') Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ.; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x), & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (α') Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y .

(β') Να εξετάσετε αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(γ') Να βρεθούν:

(i) Η μέση τιμή των τ.μ. X και Y , δηλαδή $E[X]$ και $E[Y]$.

(ii) Η διασπορά των τ.μ. X και Y , δηλαδή $var(X)$ και $var(Y)$.

Άσκηση 3

Οι τ.μ. X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέση τιμή μηδέν και διασπορά μονάδα. Επίσης, ισχύει ότι $E[XY] = 0.5$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $W = X + Y$ και $Z = |W|$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τη συνεχή ομοιόμορφη τ.μ. X για την οποία γνωρίζουμε ότι $E[X] = \frac{4}{8} = 0.5$ και $var(X) = \frac{25}{12}$. Η τ.μ. X είναι είσοδος σε ένα σύστημα με μετασχηματισμό $Y = X^2$.

(α') Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f_X(x)$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(β') Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = X^2$ και να δώσετε το πεδίο τιμών της τ.μ. Y .

(γ') Να υπολογίσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$ και τη σ.π.π. $f_Y(y)$.

Άσκηση 5

Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, 0 \leq x+y < 1 \\ c, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, 1 \leq x+y < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α') Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε τη σταθερά c .

(β') Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. X .

(γ') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X + Y < 4/3)$.

(δ') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \geq 1)$.

Άσκηση 6

Έστω δύο Γκαουσιανές τ.μ. X και Y με τις εξής παραμέτρους: $E[X] = 1$, $E[Y] = 3$, $var(X) = 4$, $var(Y) = 1$, $\rho_{X,Y} = 0.2$.

(α') Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. $Z = 2X + 3Y - 1$.

(β') Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Z^2 - 2Z \leq 0)$ εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

(γ') Έστω $W = X + \alpha Y$. Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς α ώστε οι τ.μ. W και X να είναι ασυσχέτιστες.

Άσκηση 7

Θεωρείστε έναν κύλινδρο με ύψος H και ακτίνα R , όπου H και R είναι δύο ανεξάρτητες και όμοια κατανεμμένες τ.μ. που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$: $H \sim U[0, 1]$ και $R \sim U[0, 1]$. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι προφανώς $V = \pi H R^2$.

- (α') Να υπολογιστεί ο μέσος όγκος, $E[V]$, του κυλίνδρου.
- (β') Ποια είναι η πιθανότητα ο όγκος του κυλίνδρου να είναι μεγαλύτερος από $\frac{\pi}{27}$ δεδομένου ότι το ύψος του είναι ίσο με $\frac{1}{3}$;
- (γ') Να υπολογιστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_V(v)$, του όγκου V . Ποια η πιθανότητα $P(V \leq \pi/2)$;
- (δ') Να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_V(v)$.