

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/12/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 17/01/2025

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΠΟΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Έστω ότι η από κοινού σ.π.π δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τον τύπο:

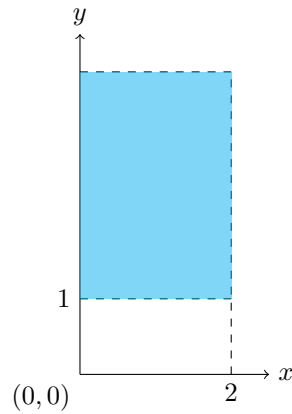
$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y), & 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- (α) Προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς c .
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{1}{2})$.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(Y \leq X + 1)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(Y = X^2)$.

Άσκηση 2

Έστω ότι ένα σημείο της μορφής (X, Y) επιλέγεται τυχαία μέσα στο τετράπλευρο χωρίο S που ορίζεται παρακάτω (Σχήμα 1):

$$S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 \text{ και } 1 \leq y \leq 4\}$$



Σχήμα 1: Χωρίο S

- (α) Προσδιορίστε την από κοινού σ.π.π.
- (β) Υπολογίστε τις περιθώριες σ.π.π. για τις τυχαίες μεταβλητές X, Y .
- (γ) Είναι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y ανεξάρτητες; Εξηγήστε την απάντησή σας.
- (δ) Αν το σημείο (X, Y) επιλεγεί τυχαία μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, είναι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y ανεξάρτητες; Εξηγήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 3

Ο Στέλιος και η Στέλλα σχεδιάζουν να πάνε σινεμά για να παρακολουθήσουν την ταινία *Moneyball*. Η ταινία ξεκινά στις 7:20 μ.μ., γι' αυτό αποφασίζουν να συναντηθούν έξω από το σινεμά σε ένα χρονικό διάστημα μεταξύ 6:00 μ.μ. και 7:00 μ.μ. Ωστόσο, η Στέλλα δεν αντέχει να περιμένει, οπότε συμφωνούν ότι κανένας από τους δύο δεν θα περιμένει τον άλλο για περισσότερο από 15 λεπτά. Ποια είναι η πιθανότητα να συναντηθούν έξω από το σινεμά;

Άσκηση 4

Θεωρούμε την τ.μ. X η οποία είναι ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή: $X \sim U[1, 2]$. Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή ως εξής: $Y = e^{-2X}$.

- (α) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X , $f_X(x)$, καθώς και αυτή του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$.
- (β) Να υπολογιστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Y , $F_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (γ) Να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y , $f_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbb{P}(Y \leq e^{-3})$.

Άσκηση 5

Έστω $X \sim \exp(\lambda)$ μία εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ . Έστω $Y = \lfloor X \rfloor$ το ακέραιο μέρος της X . Δηλαδή, αν $k \leq X < k+1$ τότε $Y = k$ για $k = 0, 1, 2, \dots$

- (α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της Y . Αναγνωρίστε την κατανομή της τ.μ. Y .
- (β) Ορίστε το σφάλμα κβάντισης ως $Z = X - \lfloor X \rfloor$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z .

Άσκηση 6

- (α) Δύο όργανα χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της απόστασης μεταξύ δύο σημείων. Η πραγματική απόσταση είναι L . Το σφάλμα μέτρησης ενός οργάνου ορίζεται ως η μέτρηση του οργάνου μείον την πραγματική τιμή της ποσότητας. Το σφάλμα μέτρησης του πρώτου οργάνου ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $0.006L$, ενώ το σφάλμα μέτρησης του δεύτερου οργάνου ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $0.004L$. Οι δύο μετρήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο μέσος όρος των δύο μετρήσεων βρίσκεται εντός $\pm 0.5\%$ γύρω από την πραγματική απόσταση. Εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(u)$.
- (β) Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες (*i.i.d.*) Υπολογίστε το συντελεστή συσχέτισης των τ.μ. $Z = aX + bY$ και $W = aX - bY$, όπου a και b δύο σταθερές.