

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2/12/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 16/12/2024

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και, στη συνέχεια, να φτιάξετε **ένα PDF** που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε **μηδενισμό** των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1 Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(5-x) & 0 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (α) Υπολογίστε την τιμή του c και σχεδιάστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.
- (β) Υπολογίστε και σχεδιάστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X , $F_X(x)$.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2 \leq X \leq 3)$.
- (δ) Υπολογίστε την μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$.
- (ε) Υπολογίστε τη διασπορά $\text{Var}(X)$.

Άσκηση 2 Μια ομάδα φοιτητών του Πανεπιστημίου αναλαμβάνει να σχεδιάσει ένα νέο smartphone. Έχοντας νικήσει τον ανταγωνισμό σε όλα τα benchmarks, αποφάσισαν να ασχοληθούν με τη διάρκεια ζωής του τηλεφώνου. Παρατηρούν ότι ο χρόνος λειτουργίας του τηλεφώνου μοντελοποιείται ως μια τυχαία μεταβλητή X (σε ώρες), με την ακόλουθη σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & x \geq 10, \\ 0 & x < 10. \end{cases}$$

- (α) Επαληθεύστε ότι η $f_X(x)$ είναι μια έγκυρη σ.π.π.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα το τηλέφωνο να αντέξει για πάνω από 20 ώρες.

- (γ) Υπολογίστε την Α.Σ.Κ. του X .
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X \geq 35)$
- (ε) Ποια η πιθανότητα από τα 3 prototypes των φοιτητών, μόνο ένα να έχει διάρκεια ζωής πάνω από 35 ώρες;

Άσκηση 3 Μια τυχαία μεταβλητή X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} + c \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

- (α) Υπολογίστε την τιμή του c .
- (β) Βρείτε την $f_X(x)$.

Άσκηση 4 Έστω $Y = e^X$

- (α) Βρείτε την Α.Σ.Κ. και την σ.π.π. της Y ως συνάρτηση της Α.Σ.Κ. και σ.π.π. της X .
- (β) Βρείτε την σ.π.π. της Y όταν η X είναι Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή.
- (γ) Έστω τώρα ότι η τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{N}(\mu = 15, \sigma^2 = 4)$ μοντελοποιεί το απόθεμα των laptops γνωστής μάρκας σε κάποιο μαγαζί ενόψει Black Friday. Υπολογίστε την πιθανότητα ένα μαγαζί να έχει τουλάχιστον 10 laptops.
- (δ) Αν τώρα θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y αντιπροσωπεύει την αξία της μετοχής της γνωστής μάρκας laptop που μοντελοποιεί η X , ποιά η πιθανότητα $P(Y > 60.000)$;

Για τον υπολογισμό των παραπάνω, χρησιμοποιήστε όπου χρειάζεται τον πίνακα 1 του παραρτήματος.

Άσκηση 5 Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα αποτελείται από μια πηγή πληροφορίας, ένα κανάλι μετάδοσης και ένα δέκτη. Θεωρίστε μια πηγή πληροφορίας που παράγει ένα εκ των τριών συμβόλων με την ίδια πιθανότητα. Στη συνέχεια, το κανάλι εισάγει θόρυβο παραμορφώνοντας το σήμα που έχει επιλεγεί για την αποστολή του εκάστοτε συμβόλου. Έτσι, ο δέκτης λαμβάνει την τιμή $Y = X + N$, όπου X η τιμή που στάλθηκε και N τυχαία μεταβλητή που παριστάνει προσθετικό θόρυβο με κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 = 4$.

- (α) Υποθέστε ότι ο πομπός κωδικοποιεί τα 3 σύμβολα ως $\{-1, 0, 1\}$. Στον δέκτη το λαμβανόμενο μήνυμα αποκωδικοποιείται ως εξής:
- Αν $Y > \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 1.
 - Αν $Y < -\frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο -1.
 - Αν $-\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 0.

Καθορίστε την πιθανότητα λάθους για το παραπάνω σχήμα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.

(β) Σε μια προσπάθεια να μειωθεί η πιθανότητα λάθους, γίνονται οι ακόλουθες τροποποιήσεις. Ο πομπός κωδικοποιεί τους 3 τύπους μηνυμάτων με τιμές $\{-2, 0, 2\}$, ενώ ο δέκτης αποκωδικοποιεί ως εξής:

- Αν $Y > \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 2.
- Αν $Y < -\frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο -2.
- Αν $-\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 0.

Επαναλάβετε το βήμα (α) για αυτό το σχήμα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

Για τον υπολογισμό των παραπάνω, χρησιμοποιήστε όπου χρειάζεται τον πίνακα 1 του παραρτήματος.

Άσκηση 6 Έστω X μια Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με $\mu = 5$ και $\sigma^2 = 16$. Υπολογίστε:

- (α) $P(X > 4)$ και $P(2 \leq X \leq 7)$.
- (β) Αν $P(X < \alpha) = 0.8869$, βρείτε το α .
- (γ) Αν $P(13 < X \leq c) = 0.0011$, βρείτε το c .
- (δ) Αν $Y = X \cos(\omega t + \theta)$, όπου ω δεδομένη γωνιακή συχνότητα, θ δεδομένη γωνία, και t **μή-τυχαία** μεταβλητή χρόνου, υπολογίστε την πρώτη και δεύτερη ροπή της Y .

Για τον υπολογισμό των παραπάνω, χρησιμοποιήστε όπου χρειάζεται τον πίνακα 1 του παραρτήματος.

Άσκηση 7 Για το προγραμματιστικό μέρος της άσκησης, θα δημιουργήσετε ένα πρόγραμμα σε Matlab ή Python το οποίο θα προσομοιώνει τη συμπεριφορά των τυχαίων μεταβλητών της άσκησης 4. Συγκεκριμένα:

- (α) Δημιουργήστε 10^4 δείγματα από μια κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 15$, $\sigma^2 = 4$.
- (β) Από τα παραπάνω δείγματα υπολογίστε την $Y = e^X$, όπου X η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή του (α) ερωτήματος.
- (γ) Σχεδιάστε το ιστόγραμμα των δειγμάτων της Y .
- (δ) Μεταβάλλετε το σ του (α) ερωτήματος σε μικρότερες τιμές και επαναλάβετε τα ερωτήματα (β), (γ), εξετάζοντας διάφορες τιμές. Τι παρατηρείτε;

Χρήσιμες συναρτήσεις: Matlab: randn, histogram Python: numpy.random.normal, matplotlib.pyplot.hist

Παράρτημα

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99009	0.99035	0.99061	0.99086	0.99110	0.99134	0.99157
2.4	0.99180	0.99204	0.99224	0.99245	0.99265	0.99285	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99429	0.99445	0.99461	0.99476	0.99491	0.99506	0.99520
2.6	0.99533	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99597	0.99609	0.99620	0.99631	0.99642
2.7	0.99653	0.99663	0.99673	0.99683	0.99692	0.99702	0.99711	0.99719	0.99728	0.99736
2.8	0.99745	0.99752	0.99759	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99794	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99830	0.99835	0.99841	0.99846	0.99851	0.99855	0.99860
3.0	0.99865	0.99869	0.99873	0.99877	0.99881	0.99885	0.99889	0.99893	0.99896	0.99899
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99912	0.99915	0.99918	0.99921	0.99924	0.99927	0.99929
3.2	0.99932	0.99935	0.99938	0.99941	0.99944	0.99947	0.99950	0.99953	0.99956	0.99958
3.3	0.99961	0.99964	0.99967	0.99970	0.99973	0.99976	0.99979	0.99982	0.99985	0.99988
3.4	0.99991	0.99994	0.99997	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.5	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.6	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.7	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.8	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.9	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.0	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.1	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.2	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.3	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.4	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.5	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.6	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.7	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.8	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.9	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999

Example: $\Phi(3.39) = 0.9996505$, $\Phi(0.98) = 0.8365$.

Σχήμα 1: Πίνακας Τυπικής Κανονικής Κατανομής