

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 07/11/2025

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/11/2025

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, σκανάρετε ή φωτογραφίστε τις κόλλες των ασκήσεών σας και φτιάξτε ένα PDF που θα περιλαμβάνει όλες τις λύσεις.
- **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΑ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΑ**. Θολές εικόνες μπορεί να οδηγήσουν σε μηδενισμό.

Άσκηση 1

Έστω η τ.μ. X με Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας (ΣΜΠ):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{c}, & \text{αν } x = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α') Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .
- (β') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X .
- (γ') Ορίστε τη νέα τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$ και βρείτε τη ΣΜΠ $p_Z(z)$ της τ.μ. Z .
- (δ') Χρησιμοποιώντας το (γ), υπολογίστε τη διασπορά $\text{var}(X)$ της τ.μ. X .
- (ε') Επαληθεύστε το αποτέλεσμα μέσω $\text{var}(X) = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x)$.

Άσκηση 2

Ένας δέκτης λαμβάνει πακέτα δεδομένων που αποτελούνται από 8 *bits* το καθένα. Κάθε *bit* μεταδίδεται σωστά με πιθανότητα $p = 0.98$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.

- (α') Έστω η τυχαία μεταβλητή X που δηλώνει το πλήθος των *λανθασμένων bits* σε ένα πακέτο. Ποια κατανομή ακολουθεί η X και ποιες είναι οι παράμετροί της;
- (β') Υπολογίστε την πιθανότητα ένα πακέτο να περιέχει:
 - κανένα λάθος *bit*,

- ακριβώς 1 λάθος *bit*,
- τουλάχιστον 2 λάθος *bits*.

(γ') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ και τη διασπορά $var(X)$ της X .

(δ') Ο δέκτης λαμβάνει συνολικά 1000 τέτοια πακέτα. Ποιος είναι ο αναμενόμενος συνολικός αριθμός λανθασμένων *bits* που θα ληφθούν;

Άσκηση 3

Ένα δίκαιο ζάρι ρίχνεται διαδοχικά μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά ο αριθμός '6'. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Y ως τον αριθμό των ρίψεων που απαιτούνται μέχρι την πρώτη επιτυχία.

(α') Γράψτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (ΣΜΠ) της Y . Ποια κατανομή ακολουθεί η Y και ποιες είναι οι παράμετροί της;

(β') Υπολογίστε:

- $P(Y = 1)$, δηλαδή την πιθανότητα να φέρουμε 6 στην πρώτη ρίψη.
- $P(Y = 3)$, δηλαδή να χρειαστούν ακριβώς 3 ρίψεις.
- $P(Y \leq 4)$, δηλαδή να φέρουμε 6 στις πρώτες 4 ρίψεις.

(γ') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[Y]$ και τη διασπορά $var(Y)$ της Y .

(δ') Υποθέστε τώρα ότι θέλουμε να πετύχουμε δύο *επιτυχίες* (δύο εξάρια) αντί για μία. Ποια κατανομή περιγράφει αυτήν την περίπτωση; Ποια είναι η μέση τιμή της νέας τ.μ.;

Άσκηση 4

Έστω οι τ.μ. $X \in \{1, 2\}$ και $Y \in \{1, 2, 3\}$ με από κοινού ΣΜΠ $p(x, y) = c(x + y)$, όπου $x \in \{1, 2\}$, $y \in \{1, 2, 3\}$ και c είναι μία σταθερά.

(α') Υπολογίστε τη σταθερά c .

(β') Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας για τις τ.μ. X και Y , $p_X(x)$, $p_Y(y)$.

(γ') Είναι οι X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε.

(δ') Υπολογίστε $E[X]$, $E[Y]$ και $E[2X + 3Y]$.

Άσκηση 5

(α') Υπολογίστε το $E[X^2]$ για *Poisson* τ.μ. με μέση τιμή 5.

(β') Αν Y είναι Γεωμετρική τ.μ. με μέση τιμή 4, υπολογίστε $var(2 - 3Y)$.

(γ') Αν Z είναι ο αριθμός εμφανίσεων γεγονότος A (πιθανότητα p) σε 100 δοκιμές, βρείτε $E[Z]$ το A εμφανίστηκε 4 φορές στις πρώτες 6 δοκιμές].

Άσκηση 6

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δύο τ.μ. X, Y δίνεται από τον πίνακα:

(α') Βρείτε τη σταθερά c .

(β') Υπολογίστε $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.

(γ') Βρείτε $E[X]$, $E[Y]$, $var(X)$, $var(Y)$.

(δ') Υπολογίστε $P(Y < X)$ και $P(Y = X)$.

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$3c$	c	$6c$
$X = 2$	$2c$	0	$4c$
$X = 3$	c	c	$2c$

Άσκηση 7 (Προγραμματιστική)

Αναπαράγετε προγραμματιστικά (*Python*) την σύγκριση της Διωνυμικής και *Poisson* κατανομής.

(α') Για $n = 100$, $p = 0.1$ σχεδιάστε τη Διωνυμική κατανομή και την *Poisson* με $\lambda = 10$.

(β') Δημιουργήστε 100 δείγματα της Διωνυμικής και απεικονίστε το ιστόγραμμα (πειραματική ΣΜΠ).

(γ') Συγκρίνετε θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα. Πότε η *Poisson* προσεγγίζει καλύτερα τη Διωνυμική;