

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/11/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 21/11/2024

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Έστω η τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{c}, & \text{αν } x = -2, -1, 1, 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (α') Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .
- (β') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X .
- (γ') Ορίζουμε τη νέα τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$. Υπολογίστε τη σ.π. $p_Z(z)$ της τ.μ. Z .
- (δ') Χρησιμοποιώντας το (γ'), υπολογίστε τη διασπορά $var(X)$ της τ.μ. X .
- (ε') Υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. X χρησιμοποιώντας τον τύπο: $var(X) = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x)$.

Άσκηση 2

Αν $E[X] = 5.5$ και $var(X) = 8.25$, υπολογίστε τα εξής:

- (α') $E[(1 + X)^2]$
- (β') $var(2024 + 2X)$
- (γ') Δεδομένου ότι το X εκφράζει το αποτέλεσμα της ρίψης ενός δίκαιου δεκάεδρου ζαριού, βρείτε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας και επαληθεύστε την μέση τιμή και την διασπορά.

Άσκηση 3

Ένας δέκτης δυαδικών δεδομένων κάνει λάθη κατά την λήψη μιας ακολουθίας συμβόλων με τέσσερα *bit* το καθένα. Η λήψη τελειώνει όταν ληφθούν 2000 ανεξάρτητα τετράμπιτα σύμβολα (συνολικά 8000 *bits* ή 1000 *bytes*).

- (α') Εάν κάθε *bit* λαμβάνεται σωστά με πιθανότητα $p = 0.99$, βρείτε τον μέσο όρο των λαθών της λήψης.
- (β') Τι τιμή πρέπει να πάρει το p ώστε ο μέσος όρος των λαθών να είναι το πολύ 20.
- (γ') Έστω ότι τώρα εφαρμόζονται διάφορες τεχνικές διόρθωσης λαθών στον δέκτη και πλέον έχει εξασφαλιστεί ότι σε κάθε σύμβολο υπάρχει 0.018 πιθανότητα να διαβαστεί ένα λάθος *bit* και 0.002 πιθανότητα να διαβαστούν δύο λάθος *bits*, ενώ ποτέ δεν θα υπάρχουν περρισσότερα από 2 λάθη ανά σύμβολο. Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X = (το πλήθος των λάθος *bits* ανά σύμβολο) και υπολογίστε τον μέσο όρο των λαθών, σε *bits*, της λήψης.

Άσκηση 4

Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	1/4	0	1/4
$X = 2$	1/8	0	1/8
$X = 3$	1/8	0	1/8

- (α') Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_X(x)$ της τ.μ. X . Υπολογίστε την μέση τιμή της X , $E[X]$.
- (β') Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_Y(y)$ της τ.μ. Y . Υπολογίστε την μέση τιμή της Y , $E[Y]$.
- (γ') Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. Y , $p_{Y/A}(y)$, δεδομένου του γεγονότος $A = \{X \leq 2\}$. Ποια είναι η μέση τιμή, δεύτερη ροπή, και διασπορά της τ.μ. Y δεδομένου του A , δηλαδή ποια είναι τα $E[Y/A]$, $E[Y^2/A]$, και $var(Y/A)$, αντίστοιχα;
- (δ') Έστω η τ.μ. $Z = g(X, Y) = 2X + 3Y + 7$. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Z .
- (ε') Οι μεταβλητές X, Y είναι εξαρτώμενες ή ανεξάρτητες μεταξύ τους; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Άσκηση 5

- (α') Υπολογίστε το $E[X^2]$ για μία *Poisson* τ.μ. με μέση τιμή ίση με 10.
- (β') Αν Y είναι Γεωμετρική τ.μ. με μέση τιμή 2, υπολογίστε το $var(1 - 2Y)$.
- (γ') Η τ.μ. Z δηλώνει τον αριθμό των εμφανίσεων ενός γεγονότος A (με πιθανότητα εμφάνισης p) σε 100 ανεξάρτητες δοκιμές. Ποια είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. Z δεδομένου ότι το γεγονός A εμφανίστηκε 7 φορές στις πρώτες 24 δοκιμές;

Άσκηση 6

Ο Χρήστος αφιερώνει K ώρες στην αγορά βιβλίων, όπου K μια διακριτή τ.μ με ισοπίθανες τιμές 1, 2, 3 και 4. Ο αριθμός N των βιβλίων που αγοράζει ο Χρήστος είναι και αυτός μια διακριτή τ.μ που εξαρτάται από το πόση ώρα φωνίζει. Άρα :

$$p_{N/K}(n/k) = \frac{1}{k}, \text{ για } n = 1, \dots, k.$$

- (α) Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των K και N .
- (β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. της N .
- (γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της K δεδομένου του γεγονότος $N = 2$.

- (δ) Μας δίδεται ότι ο Χρήστος αγόρασε τουλάχιστον 2 αλλά όχι περισσότερα από 3 βιβλία. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της K , δεδομένης της παραπάνω πληροφορίας.
- (ε) Το κόστος κάθε βιβλίου είναι τ.μ. με μέση τιμή ίση με 3 ευρώ. Υπολογίστε τη μέση τιμή του ποσού το οποίο ο Χρήστος ξόδεψε συνολικά σε βιβλία. Υπόδειξη: Δεσμεύστε ως προς τα γεγονότα $N = 1, \dots, N = 4$ και χρησιμοποιήστε το θεώρημα ολικής μέσης τιμής.

Άσκηση 7 - Προγραμματιστική

- (α) Για $\lambda = 1$ και για τέσσερις ακόμη τιμές της επιλογής σας, σχεδιάστε μία Poisson κατανομή και σχολιάστε σχετικά με την "επιρόη" της τιμής του λ στη συγκεκριμένη κατανομή.
- (β) Για $n = 10$ και $p = 0.3$ σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τις αντίστοιχες Poisson και Διωνυμική. Επαναλάβετε για $n = 100$ και $p = 0.2$, για $n = 1000$ και $p = 0.1$ και για $n = 10000$ και $p = 0.01$. Για όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις, σχολιάστε τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

Μαζί με τον κώδικά σας, παραδώστε τις εικόνες/διαγράμματα που παράξατε, καθώς και τα σχόλια στα ερωτήματα που έχουν τεθεί.

Χρήσιμες συναρτήσεις: (MATLAB: `binopdf`, `poisspdf` - Python: `scipy.stats.binom`, `scipy.stats.poisson`)