

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/10/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 29/10/2024

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Το πρόβλημα αυτό εξετάζει εξετάζει την κατανόησή σας για την έννοια της ανεξαρτησίας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μέρος (α) για να απαντήσετε το (γ).

- Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση: Αν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα και $B \subset A$, τότε $P(A) = 1$ ή $P(B) = 0$.
- Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα n φορές. Έστω $n = 3$. Ορίζουμε τα γεγονότα: $A = \{\text{έρχονται τουλάχιστον 2 γράμματα}\}$ και $B = \{\text{έρχονται μία ή δύο κεφαλές}\}$. Είναι τα A και B ανεξάρτητα;
- Επαναλάβετε το μέρος (b) για $n = 4$.

Άσκηση 2

Υπάρχουν τρία κουτιά, το καθένα με ένα συρτάρι σε κάθε μία από τις δύο πλευρές. Κάθε συρτάρι περιέχει ένα νόμισμα (άρα δύο νομίσματα σε κάθε κουτί). Ένα κουτί περιέχει ένα χρυσό νόμισμα σε κάθε πλευρά (GG), ένα άλλο περιέχει ένα ασημένιο νόμισμα σε κάθε πλευρά (SS), και το τρίτο περιέχει ένα χρυσό νόμισμα στη μία πλευρά και ένα ασημένιο στην άλλη (GS). Επιλέγουμε τυχαία ένα κουτί, ανοίγουμε τυχαία ένα συρτάρι, και βρίσκουμε μέσα ένα χρυσό νόμισμα. Ποια είναι η πιθανότητα το νόμισμα στην άλλη πλευρά να είναι επίσης χρυσό;

Άσκηση 3

Ένας πεζός στο Ηράκλειο αποφασίζει να διασχίσει το δρόμο αλλά φοβάται μήπως τον πατήσουν τα αυτοκίνητα. Ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει. Αν έρθει γράμμα, δεν διασχίζει το δρόμο. Αν έρθει κορώνα, επειδή είναι πολύ φοβισμένος, αποφασίζει να ρίξει το κέρμα άλλες 2 φορές. Αν οι επόμενες 2 ρίψεις είναι και αυτές κορώνα, τότε διασχίζει το δρόμο. Αν όχι, θα μείνει ακίνητος στην άκρη του δρόμου.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο πεζός δεν θα διασχίσει το δρόμο.
- (β) Με δεδομένο ότι ο πεζός δεν διασχίζει το δρόμο, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη του κέρματος έφερε γράμμα.
- (γ) Με δεδομένο ότι ο πεζός δεν διασχίζει το δρόμο, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη του κέρματος έφερε κορώνα.

Άσκηση 4

Ρίχνουμε ανεξάρτητα δύο δίκαια εξάεδρα ζάρια. Ορίζουμε τα γεγονότα:

$A = \{\text{Το πρώτο ζάρι φέρνει: } 1, 2, \text{ ή } 3\}$, $B = \{\text{Το δεύτερο ζάρι φέρνει: } 2, 3, \text{ ή } 6\}$, και $C = \{\text{Το άθροισμα των δύο ρίψεων} = 9\}$.

- (α) Δείξτε ότι $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$;
- (β) Είναι τα A , B , και C ανεξάρτητα;

Άσκηση 5

Το δίκαιο εξάδρο ζάρι A έχει 5 πράσινες όψεις και μία κόκκινη. Το δίκαιο εξάδρο ζάρι B έχει 3 πράσινες όψεις και 3 κόκκινες. Ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα. Αν έρθει κεφαλή, το παιχνίδι συνεχίζεται ρίχνοντας *μόνο* το ζάρι A , αλλιώς, αν έρθουν γράμματα, το παιχνίδι συνεχίζεται ρίχνοντας *μόνο* το ζάρι B .

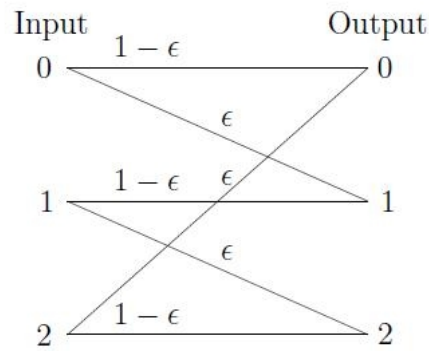
- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η n -στη ρίψη του ζαριού φέρνει πράσινο.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι τόσο η n -στη όσο και η $(n + 1)$ -στη ρίψη του ζαριού φέρνουν πράσινο.
- (γ) Αν έρθει πράσινο κατά τις n πρώτες ρίψεις, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η $(n+1)$ -στη ρίψη θα φέρει πράσινο. Τι γίνεται καθώς το n τίνει στο άπειρο; Δώστε μία εξήγηση για το αποτέλεσμα.

Άσκηση 6

Μας δίνονται 2 "πειραγμένα" νομίσματα εκ των οποίων το ένα φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $1/3$ και το άλλο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $2/3$. Τα δύο νομίσματα φαίνονται να είναι πανομοιότυπα: δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε εξ όψεως. Ρίχνουμε τα δύο νομίσματα *από μία φορά* το καθένα διαλέγοντας στην τύχη (με πιθανότητα $1/2$) ποιο θα ρίξουμε πρώτο. Ορίζουμε τα γεγονότα $H_i = \{\text{η } i\text{-στή ρίψη φέρνει κεφαλή}\}$, $i = 1, 2$.

- (α) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(H_1)$ και $P(H_2)$.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι και οι δύο ρίψεις φέρνουν κεφαλή, δηλαδή $P(H_1 \cap H_2)$.
- (γ) Είναι τα γεγονότα H_1 και H_2 ανεξάρτητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 7



Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης για ένα τριαδικό κανάλι επικοινωνίας φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Υποθέστε ότι τα σύμβολα 0, 1 και 2 στέλνονται με πιθανότητες $1/2$, $1/4$ και $1/4$, αντίστοιχα.

(α) Βρείτε τις πιθανότητες λήψης των συμβόλων 0, 1 και 2.

(β) Δεδομένου ότι λαμβάνεται 1, βρείτε τις πιθανότητες να εστάλη 0, 1 ή 2. Να απαντήσετε συναρτήσει του όρου ϵ (πιθανότητα λάθους).